

1918.

GENERAL LIBRARY

415
No. 23.

ADD 81018
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 57. Heft 7.

DER GANZEN REIHE 362. BANDES 7. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.

Ausgegeben am 20. Dezember 1918.

Inhalt.

	Seite
1. Irene Parankiewicz. Über die lichtpositive und die lichtnegative Photophoresis. (Untersucht am Schwefel und Selen)	489
2. A. Landé. Die Randbelegungsmethode zur Lösung von Potential- und Schwingungsproblemen	519
3. W. Schottky. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern	541
4. W. J. de Haas. Die Beugungserscheinungen, welche an einer großen Anzahl unregelmäßig verstreuter Öffnungen oder undurchlässiger Teilchen auftreten	568

Zur Beachtung.

Zu dem Aufsatz Professor Dr. Stenström: „Experimentelle Untersuchungen der Röntgenspektren“, enthalten in Nr. 21 der „Annalen der Physik“, gehört eine Tafel, die bis zur Ausgabe des Heftes nicht mehr rechtzeitig fertiggestellt werden konnte und die daher nachträglich diesem Heft Nr. 23 beigegeben wird.

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 57.

1. Über die lichtpositive und die lichtnegative Photophorese.¹⁾ (Untersucht am Schwefel und Selen); von Irene Parankiewicz.

Inhalt: Einleitung. — § 1. Größenbestimmung von Schwefelpartikeln aus deren Farbe und Fallgeschwindigkeit. — § 2. Der photophoretische Effekt an Schwefelpartikeln. — § 3. Untersuchung der photophoretischen Wirkung auf Schwefelpartikel bei verschiedenen Drucken. — § 4. Der photophoretische Effekt an Selenpartikeln. — § 5. Quantitative Untersuchung des Effektes: a) lichtpositive Selenmodifikation, b) lichtnegative Selenmodifikation. — § 6. Zusammenfassung.

Einleitung.

Die vorliegenden Experimente an einzelnen kugelförmigen Selen- und Schwefelpartikeln der Größenordnung $8-60 \cdot 10^{-6}$ cm Radius bezwecken, nach der von Ehrenhaft angegebenen Methode den dynamischen Effekt des Lichtes auf die Materie einer detaillierten Untersuchung zuzuführen.

Ehrenhaft hat nämlich gezeigt²⁾, daß Partikel gewisser Materialien, im Schwerefeld herabfallend oder im elektrischen Felde steigend, von einem stark konzentrierten Lichtstrahle aus ihrer vertikalen Fall- bzw. Steigrichtung in die horizontale Richtung abgelenkt werden. Von diesen werden Schwefelpartikel ausnahmslos der Richtung des einfallenden Lichtstrahles entgegen (lichtnegativ) geführt. Bei gewissen Selenpartikeln tritt eine sehr starke lichtnegative Bewegung auf, bei anderen Selenpartikeln wird unter Umständen auch eine Bewegung vom Lichte weg, d. h. eine lichtpositive Bewegung beobachtet. Ehrenhaft hat festgestellt, daß diese je nach der Materie des bestrahlten Probekörpers anziehende

1) Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften auszugsweise mitgeteilt.

2) F. Ehrenhaft, „Zur Physik des Millionstel Zentimeters“. Physik. Zeitschr. 18. p. 352. 1917; „Die Photophorese“, Ann. d. Phys. 56. p. 81. 1918.

bzw. abstoßende Wirkung des Lichtstrahles von der eingestrahnten Energie und von der bestrahlten wägbaren Materie abhängt, nicht aber von der Art und dem Drucke des die Probekörper umgebenden Gases, daß also die Ursache dieser Bewegungen, die lichtpositive bzw. lichtnegative Kraft eine direkte Wirkung der Strahlung auf die Materie (im Sinne seiner Auseinandersetzungen eine Kraft erster Art) darstellt.

Aufgabe dieser Untersuchung ist es nun, eine detaillierte, quantitative Messung dieser photophoretischen Kräfte am Schwefel und Selen durchzuführen, und einerseits die Abhängigkeit der Intensität und Richtung der photophoretischen Kraft von der Größe bzw. vom Material des betreffenden Probekörpers und von der Intensität des einfallenden Strahles festzustellen, andererseits den zeitlichen Verlauf der Erscheinung und die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit derselben vom Drucke des die Probekörper umgebenden Gases zu untersuchen. Hierzu stand mir die Ehrenhartsche Versuchsanordnung zur Verfügung.

Die experimentelle Bestimmung der Kraft¹⁾, welche die Strahlung auf die Partikel überträgt, läßt sich nach der Beziehung

$$\mathfrak{P} = \frac{v}{B}$$

auf die Bestimmung der durch diese Kraft \mathfrak{P} hervorgerufenen Fortführungsgeschwindigkeit v des Partikels im reibenden Gase und die Bestimmung des Faktors B , der Beweglichkeit des Probekörpers, d. h. seiner Geschwindigkeit bei der wirkenden Kraft 1, zurückführen.

Es ist also durch die folgenden Versuche:

1) Über die Beweglichkeitsbestimmungen vgl. F. Ehrenhaft, l. c. und „Über die Teilbarkeit der Elektrizität.“ Ann. d. Phys. 56, p. 1. 1918. Die Beweglichkeit B eines Teilchens vom Radius a wird als Funktion des Radius durch die bekannte Widerstandsformel

$$B = \frac{1}{6\pi\mu a} \left[1 + \frac{Al}{a} \right] = \frac{1}{6\pi\mu a} \left[1 + \frac{1 \cdot 63}{f + 2(1-f)} \frac{l}{a} \right]$$

gegeben, worin μ den Reibungskoeffizienten des umgebenden Gases, l die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle, A eine Konstante, deren Wert zwischen 0,815 ($f = 0$) und 1,630 ($f = 1$) liegt, bedeuten.

1. Eine Größen- und damit Beweglichkeitsbestimmung der kugelförmigen Probekörper vorzunehmen, und
2. die Fortführungsgeschwindigkeiten derselben im Strahle zu messen.

Damit ist die Intensität der photophoretischen Kräfte quantitativ festgelegt; durch Variierung der Versuchsbedingungen kann nun an ihre weitere Untersuchung geschritten werden.

§ 1. Größenbestimmung von Schwefelpartikeln aus deren Farbe und Fallgeschwindigkeit.¹⁾

Die Versuche an Schwefelpartikeln sind teils im reinsten trockenen Argon²⁾ (Partikel 1—63), teils im Stickstoff (Partikel I—XII) ausgeführt worden.³⁾ Zur Herstellung der Probekörper wurde die Methode des Verdampfens der betreffenden Substanz verwendet. Der Dampf kondensiert zu kleinen Kugeln⁴⁾, die sich im Dunkelfelde in einem Kondensator nach dem bekannten Verfahren im Schwere- und im elektrischen Felde behandeln lassen.

In der Größenordnung $8-20 \cdot 10^{-6}$ cm Radius zeigen diese Partikel lebhaftere Resonanzfarben, die mit wachsendem Radius der Kügelchen von blauen und grünen über grün-gelbe und gelbe Töne in die Eigenfarbe des Schwefels übergehen. Die Fallgeschwindigkeit der blauen Partikel ist die kleinste; dies weist darauf hin, daß diese Kügelchen auch

1) Vgl. I. Parankiewicz, Physik. Zeitschr. 18, p. 567. 1917.

2) Das Argon aus der Bombe, freundlicherweise von Linde (München-Hellriegelskreuth), zur Verfügung gestellt, das noch 30 Proz. Stickstoff und 0,5 Proz. Sauerstoff enthielt, wurde zur weiteren Reinigung im elektrischen Ofen über Polzenius'sche Masse zur Absorption des restlichen Stickstoffes und anderer aktiver Gase, sodann über mehrere Trocknungsvorlagen aus H_2SO_4 und P_2O_5 , über elektrische Öfen mit Cu-Spiralen (Bindung von O_2), CuO (Absorption von Wasserstoff), schließlich über glühendes metallisches Ca (Absorption der Reste von Stickstoff) und unmittelbar vor der Apparatur über zwei P_2O_5 -Röhren und Vorlagen aus Glaswolle geleitet. Zur Reinigung und Trocknung des Stickstoffes dienten mehrere Vorlagen aus H_2SO_4 und P_2O_5 und elektrische Öfen mit Cu-Spiralen.

3) Die ausführliche Angabe der Protokolle aller Messungen, die den Untersuchungen dieser Arbeit zugrunde liegen, erfolgt in den Berichten der Wiener Akademie der Wissenschaften.

4) Mikrophotographien solcher auf Glasplatten niedergeschlagener Schwefelkügelchen hat F. Ehrenhaft l. c. veröffentlicht.

die kleinsten sein müssen. Die grünen Partikel fallen rascher; sie sind größer. Noch größere Fallgeschwindigkeit zeigen gelbe Teilchen; am raschesten fallen Teilchen, welche die gelblichweiße Eigenfarbe des makroskopischen Schwefels im reflektierten Lichte zeigen.

Zur Feststellung der hier in Frage kommenden Beweglichkeit der Partikel, d. h. zur Bestimmung ihrer Größen nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze, wurde zunächst an jedem Partikel im nichtintensiven Teile des Strahles bei gleichzeitiger Beleuchtung des Partikels von beiden Seiten¹⁾ eine Serie von Fallzeiten gemessen, wobei die Farbe des beobachteten Partikels angegeben wurde; diese Messungen der Fallgeschwindigkeit einzelner Partikel wurden auch bei niedrigeren Gasdrucken durchgeführt.

Um die Größenbestimmung auch auf einem zweiten unabhängigen Wege durchzuführen, wurde aus der Beugungstheorie des Lichtes der Zusammenhang zwischen den Farben des von den Schwefelteilchen zerstreuten Lichtes und den Größen der zerstreuenden Kugeln nach der aus den Entwicklungen von G. Mie²⁾ folgenden Beziehung

$$J = \frac{\lambda^3}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{|a_r|^2 + |p_r|^2}{2r + 1}$$

berechnet³⁾, worin J die Intensität des von der Kugel vom bestimmten Radius a abgelenkten Lichtes der Wellenlänge λ , a_r und p_r gewisse, i. e. definierte Funktionen des Argumentes

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \alpha$$

und der für die betreffende Wellenlänge gemessenen optischen Konstanten des Schwefels sind.⁴⁾

Die bereits publizierten Kurven optischer Resonanz von Schwefelpartikeln⁵⁾ wurden einer neuerlichen und genaueren

1) Über die Versuchsanordnung vgl. F. Ehrenhaft, „Die Photo-phorese“, Ann. d. Phys. 56. p. 81. 1918; ferner vgl. die daselbst publizierte Photographie des konvergenten Strahles.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

3) I. Parankiewicz, Physik. Zeitschr. 18. p. 567. 1917.

4) Die numerischen Werte der Funktionen a_r und p_r sowie die Werte der optischen Konstanten des Schwefels sind in den Berichten der Wiener Akademie der Wissenschaften 1918, IIa angegeben worden.

5) I. Parankiewicz, l. c.

Berechnung unterzogen, indem auch für größere Werte des Argumentes a mehrere Punkte bestimmt wurden; dabei stellte sich heraus, daß die Kurven einen komplizierteren Verlauf zeigen als z. B. die der Metallpartikel, da sie mehrere Maxima aufweisen (vgl. Fig. 1).

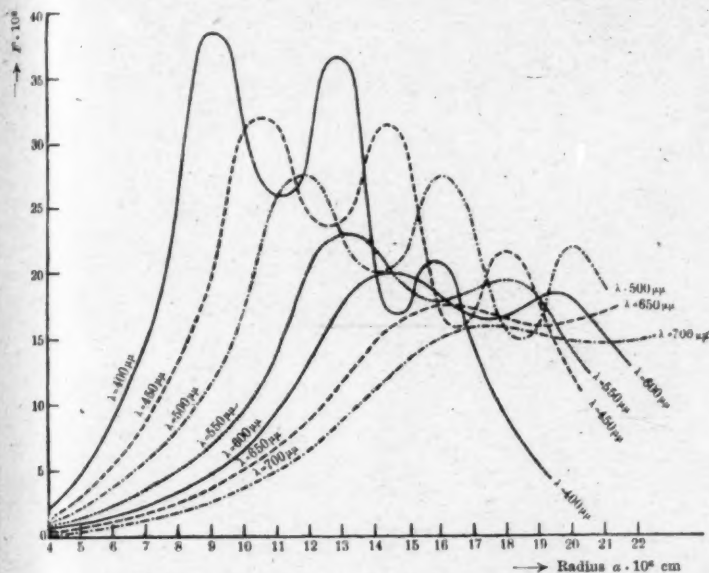


Fig. 1. Optische Resonanz der Schwefelpartikel.

Als Abszissen sind hier die Radien, als Ordinaten eine der Intensität der Gesamtstrahlung proportionale Größe F [vgl. G. Mie, l. c. p. 415, Gl. (86)] aufgetragen.

Naturgemäß zeigen dann auch die Ausstrahlungskurven von Schwefelpartikeln (Fig. 2), auf die es eben bei Bestimmung der Größe des zerstreuen Körpers aus der Wellenlänge des abgebeugten Lichtes ankommt, gewisse Wellungen, so daß eine Schätzung der von Partikeln bestimmter Größe abgebeugten Farbe aus den Maximis der Kurven nur in erster Näherung durchführbar wäre.

Nun hat inzwischen G. Laski¹⁾ aus den von der Ver-

1) G. Laski, Physik. Zeitschr. 19, p. 369. 1918.

fasserin berechneten Ausstrahlungskurven der Schwefelpartikel die Wellenlänge der von einem Partikel abgebeugten, physiologisch resultierenden Mischfarbe unter Berücksichtigung der Intensitätsverteilung des eingestrahnten Bogenlampenspektrums mit Hilfe der Theorie der Grundempfindungen festgelegt.

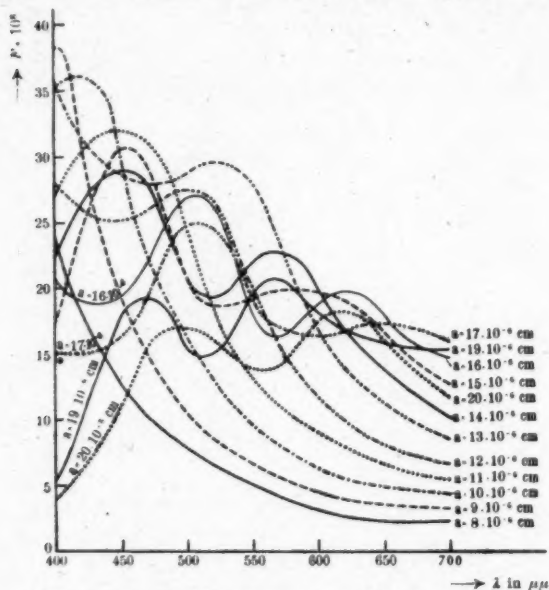


Fig. 2. Ausstrahlungskurven der Schwefelpartikel.

Auf Grund dieser Untersuchungen ergibt sich zwischen den Radien der Schwefelkugeln und den zugehörigen selektiv zerstreuten Farben folgende Zuordnung:

Radius $a \cdot 10^8$ cm	Farbe
8—9	blauviolett
9—11	blau
11—12	blaugrün bis grün
12—13	grüngelb, Übergang zu Gelb
13—15	tiefgelb
15—18	Stich ins Orange
von 18 an	Eigenfarbe des Schwefels

Die so erschlossenen Radien von Schwefelkugeln bestimmter Farbe weichen von meinen ursprünglichen, lediglich aus den

Maximis geschätzten Radien nicht wesentlich ab.¹⁾ Sie sollen nun zum Vergleich mit den Resultaten des Widerstandsgesetzes herangezogen werden.

Tab. I enthält in den Kolonnen 4 und 5 die nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze aus den Fallgeschwindigkeiten (Kolonne 3) berechneten, in der Kolonne 6 die aus der optischen Theorie resultierenden Radien.²⁾

Tabelle I.

Nr. des Parti- kels	Beob- achtete Farbe	Fallge- schwin- digkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec.	Radien $a \cdot 10^6$ cm		Aus der optischen Theorie	Ladungen $e \cdot 10^{10}$ elektrostat. Einh.	
			Aus dem Widerstands- gesetze für			Aus dem Widerstands- gesetze für	
			$f = 0$	$f = 1$		$f = 0$	$f = 1$
Normaler Druck							
19	blau	0,27	8,27	6,06	blau- violett	+ 0,91	0,35
17		0,29	8,70	6,40		- 0,24	0,09
8		0,30	8,86	6,57	8—9	+ 0,83	0,34
37		0,33	9,42	7,07	blau		
42		0,33	9,42	7,07	9—11	+ 0,42	0,18
9	grün	0,34	9,65	7,25		- 0,31	0,13
29		0,38	10,34	7,87		+ 0,61	0,27
31		0,42	11,02	8,47		+ 1,59	0,73
32		0,42	11,02	8,47	11—12	- 0,76	0,34
25		0,43	11,20	8,62		+ 1,23	0,56
27	grüngelb	0,49	12,16	9,51			
6		0,52	12,62	9,92		- 0,84	0,41
21		0,59	13,65	10,88	12—13	+ 4,55	2,30
3		0,66	14,64	11,80		+ 0,32	0,17
34		0,67	14,77	11,91	13—15	- 0,85	0,45
23	gelb	0,70	15,14	12,28		+ 0,96	0,51
12		0,77	16,06	13,12		+ 1,77	0,97
28		1,04	19,20	16,12		+ 5,12	3,03
14		10,6	19,43	16,32	15—18	+ 1,44	0,85
10		1,08	19,64	16,54		- 4,65	2,77
30	Stich ins Orange	1,16	20,50	17,34			
11		1,19	20,80	17,62		+ 2,12	1,29
4		1,24	21,30	18,12		+ 1,18	0,72
16		1,32	22,12	18,19		+ 8,30	5,19
5		1,36	22,50	19,26		+ 4,38	2,75
15	Eigen- farbe	1,39	22,74	19,52	von 18 an	+ 2,82	1,78
41		1,45	23,32	20,08		- 6,74	4,30
						- 5,85	3,73
22		1,46	23,42	20,14		+ 17,80	11,32
					+ 20,02	14,02	

1) Vgl. I. Parankiewicz l. c. p. 569.

2) Die Tabelle enthält auch (Kolonnen 7 u. 8) die den unmittelbar nach der Herstellung ungeladenen Schwefelpartikeln durch ionisierende Wirkung eines Ra-Präparates aufgezwungenen Ladungen.

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr. des Par- tikels	Beob- achtete Farbe	Fallge- schwin- digkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Radien $a \cdot 10^6$ cm		Ladungen $e \cdot 10^{10}$ elektrostat. Einh.		
			Aus dem Widerstands- gesetze für	Aus der opt'schen Theorie	Aus dem Widerstand- gesetze für		
			$f = 0$	$f = 1$	$f = 0$	$f = 1$	
Normaler Druck							
20	Eigen- farbe	1,46	23,42	20,14	von 18 an		
1		1,68	25,39	22,06		- 4,61	3,03
7		1,97	27,77	24,40		+ 2,11	1,47
36		2,04	28,32	24,92		- 3,87	2,64
39		2,13	29,02	25,62		- 2,51	1,73
35		2,27	30,07	26,64		+ 10,76	7,49
26		2,31	30,41	26,93		+ 6,72	4,67
18		2,29	30,23	26,80		+ 3,94	2,74
24		2,42	31,20	27,72		+ 6,88	4,85
40		3,44	37,92	34,37		- 5,97	4,45
33		3,90	40,60	37,00		+ 16,91	12,80
2		4,71	44,97	41,32		+ 14,16	16,98
38	4,96	46,30	42,62	- 15,35	11,96		
Druck: 496 mm Hg.							
60	blau	0,44	9,86	6,87	9-11		
63	grün	0,52	11,08	7,87	11-12		
59	gelb	0,85	15,36	11,60	13-15	+ 4,08 1,76	
61	orange	1,32	20,29	16,08	15-18	+ 7,67 3,83	
62		1,37	20,86	16,52		+ 5,98 2,98	
						+ 3,15 1,58	
						+ 4,37 2,19	
Druck: 354 mm Hg.							
43	blau	0,55	10,02	6,68	9-11		
47	grüngelb	0,81	13,20	9,15	12-13		
44	orange	1,55	20,50	15,38	15-18	- 14,00 5,90	
48	Eigen- farbe	3,08	31,65	25,50	von 18 an	+ 10,75 7,00	
45		7,50	53,50	46,40		+ 6,82 4,52	
46		10,22	63,80	56,40		+ 12,17 8,42	
Druck: 143 mm Hg.							
53	grün	0,25	11,30	6,55	11-12		
49	grüngelb	0,39	12,20	7,10	12-13	- 2,42 0,48	
54	gelb	1,77	15,10	9,10	13-15	+ 0,27 0,06	
50	orange	2,32	18,70	11,70	15-18	- 1,98 0,48	
52		2,35	18,88	11,80		+ 0,93 0,23	
51	Eigenfarbe	4,07	28,45	19,10	von 18 an		
Druck: 55 mm Hg.							
56	blau	2,48	10,75	5,20	9-11	- 0,19 0,02	
55		2,68	11,50	5,75		+ 0,09 0,01	
57	grün	3,00	12,65	6,40	11-12	+ 0,23 0,03	
58	Eigen- farbe	9,12	31,40	21,70	von 18 an	+ 2,90 0,79	
						+ 2,53 0,68	
						+ 3,46 0,95	

Der experimentelle Tatbestand dieser Beobachtungen ergibt erstens eine einheitliche Zuordnung zwischen den Wellenlängen des von den Partikeln selektiv zerstreuten Lichtes und den Fallgeschwindigkeiten, d. h. den Größen der Partikel, zweitens eine Übereinstimmung der nach dem Widerstandsgesetze ($f = 0$) aus der Fallgeschwindigkeit berechneten Radien (Kolonne 4) mit den Radien, die für Partikel betreffender Farbe aus der optischen Theorie erschlossen werden können (Kolonne 6).

Diese Übereinstimmung beweist im Einklang mit diesbezüglichen Schlüssen meiner früheren Mitteilung, daß das Stokes-Cunninghamsche Gesetz für die Radien der Schwefelpartikel des untersuchten Größenintervalles (auch bei verschiedenen Drucken) zuverlässige Werte liefert.¹⁾

Tabelle II.

Num- mer des Par- tikels	Beobachtete Farbe	Fallge- schwin- digkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Radius $a \cdot 10^6$ cm		Aus der optischen Theorie	Nummer der Farbe in der Radde- schen Skala
			Aus dem Wider- standsgesetze von Stokes- Cunningham			
			$f = 0$	$f = 1$		
IX	blauviolett	0,37	8,83	6,54	8—9	21 <i>m</i>
XII		0,37	8,83	6,54		21 <i>o</i>
III		0,46	10,13	7,69		20 <i>h</i>
II	blau	0,49	10,54	8,06	9—11	20 <i>k</i>
VI		0,52	10,94	8,42		20 <i>h</i>
IV	blaugrün	0,56	11,46	8,91	blaugrün bis grün	17 <i>m</i>
XI		0,57	11,60	9,00		16 <i>m</i>
V		0,58	11,75	9,14		17 <i>l</i>
VII	grün	0,62	12,21	9,60	11—12	13 <i>k</i>
X		0,63	12,45	9,83		13 <i>k</i>
VIII	gelb	0,90	15,40	12,53	13—15	9 <i>p</i>
I	orange	1,11	17,43	14,46	15—18	5 <i>m</i>

Um diese Schlüsse noch weiter zu erhärten, wurden einige Schwefelpartikel auch im Stickstoff gemessen (Tab. II). Nun haben Argon und Stickstoff merklich verschiedene Rei-

1) Auf diesem Wege konnte ich auch den Gültigkeitsbereich der Cunningshamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes festlegen (l. c. p. 571). Über einen neuerlichen Beweis der Anwendbarkeit dieses Gesetzes vgl. diese Studie, p. 515 und I. Parankiewicz, Physik. Zeitschr. 19. p. 280. 1918.

bungskoeffizienten, da der Reibungskoeffizient des Stickstoffs $\mu = 1,759 \cdot 10^{-4}$ um ca. 26 Proz. kleiner ist als der Reibungskoeffizient des Argons $\mu = 2,219 \cdot 10^{-4}$.

Das optische Bild der Partikel ist in beiden Gasen gleich; die Bewegung derselben im Stickstoff ist aber eine lebhaftere. Die Fallgeschwindigkeit blauer Partikel beträgt z. B. im Stickstoff ca. $5,0 \cdot 10^{-2}$ cm/sec, (Tab. II Kol. 3), im Argon $3,0 \cdot 10^{-2}$ cm/sec, (Tab. I Kol. 3), die der gelben Partikel im Stickstoff $9,0 \cdot 10^{-2}$ cm/sec, im Argon $7,0 \cdot 10^{-2}$ cm/sec; sie ist also im Stickstoff um ca. 30 Proz. größer als im Argon. Nichtsdestoweniger ergaben sich für Partikel gleicher Farbe¹⁾ in beiden Medien gleiche Intervalle der Radiengrößen (vgl. Tab. I, Kolonnen 4 und 5, und Tab. II, Kolonnen 4 und 5), d. h. es ergab sich auch im Stickstoff die Übereinstimmung der Radien aus dem Widerstandsgesetz mit den Radien aus der optischen Theorie (Tab. II, Kolonnen 4 und 6). Diese Tatsachen beweisen einerseits, daß die Größenbestimmung von Schwefelpartikeln aus deren Fallgeschwindigkeiten in verschiedenen Gasen dasselbe Resultat ergibt, unabhängig davon, in welchem Gase sie durchgeführt wurde, und andererseits bestätigen sie die Schlüsse über die Gültigkeit der Größenbestimmung von Partikeln untersuchter Größenordnung nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze.

§ 2. Der photophoretische Effekt an Schwefelpartikeln.

Beleuchtet man die Schwefelpartikel mit einem stark konzentrierten Strahle, dessen mittlere Energie mehrere hundert Male die Energie der unkonzentrierten Sonnenstrahlung über der Erdatmosphäre übertrifft, so werden sie im Strahle aus ihrer vertikalen Fallrichtung in die horizontale Richtung zum einfallenden Strahle hin abgelenkt.²⁾

1) An den im Stickstoff behandelten Partikeln habe ich sofort nach der Messung der Fallgeschwindigkeit die beobachtete Farbe des betreffenden Partikels durch Angabe ihrer Nummer in der Raddeschen Farbenskala (Société sténochromique, Paris, Verlag Otto Radde, Hamburg) festgelegt (Tab. II, Kol. 7). Durch den Vergleich mit den Farben dieser Skala hat sich herausgestellt, daß die kleinsten Partikel, die ich bei früheren Messungen als blau bezeichnete, als blau mit einem Stich ins Violette zu bezeichnen sind.

2) Vgl. F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 18. p. 362. 1917; „Die Photophorese“, Ann. d. Phys. 56. p. 81. 1918.

Diese horizontale Bewegung tritt bei einer bestimmten Größe der Partikel am intensivsten auf. An den kleinsten blauen Partikeln ist sie sehr schwach; sie wird stärker an größeren grünen und gelben Kügelchen, noch stärker an orangefarbenen Partikeln, am stärksten an weißlichen Schwefelkugeln, die schon außerhalb des Bereiches jener Größen liegen, welche das Licht selektiv zerstreuen, und wird dann wieder allmählich an ganz großen, rasch fallenden, gelblichweißen Teilchen schwächer.

Die horizontale Bewegung aller Partikel ist ferner in der Mitte des stark konzentrierten Strahles am intensivsten; am Rande desselben und in seinen divergenten Teilen werden die Partikel bedeutend weniger beeinflusst.

Diese Energieverteilung im Strahle läßt sich sogar messend nachweisen; denn es gelingt, die Wirkung der Schwere auf ein geladenes Partikel durch die dieser entgegengesetzt gerichtete elektrische Kraft zu kompensieren, die horizontale Bewegung eines auf diese Weise bloß der Wirkung der Strahlung unterworfenen Probekörpers durch das ganze Gesichtsfeld des Mikroskopes zu verfolgen und seine Passagezeiten über gleiche Strecken zwischen den Marken des Okulars zu messen.¹⁾

In der Fig. 3 sind beispielsweise die bei einer solchen Bewegung am Partikel Nr. 13 gemessenen Zeiten in sec dargestellt. Sie nehmen zunächst bis zu dem intensivsten Teile des Strahles, wo das Partikel die größte Geschwindigkeit erreicht, ab und werden dann infolge immer kleinerer treibender Kraft der Strahlungsenergie und daher kleinerer Geschwindigkeit des Partikels immer größer.²⁾

Der Vorgang bei der Messung der Fortführungsgeschwindigkeit an Einzelpartikeln bestimmter Größe war folgender: Nachdem an einem Partikel eine Serie von Fallzeiten in der p. 492 beschriebenen Weise gemessen war, wurde es durch Schließen

1) Vgl. F. Ehrenhaft, l. c.

2) Da also die Energie des mittleren Teiles des Strahles bedeutend größer als die der benachbarten Zonen ist, so sind alle Beobachtungen, aus denen Schlüsse gezogen wurden, immer nur in demselben, und zwar immer nur im mittleren Teile des Strahles ausgeführt worden.

des linken Strahles¹⁾ (mit Hilfe des Sektorenmomentverschlusses) nur der Wirkung des rechten Strahles unterworfen und die Zeit gemessen, welche das Partikel braucht, um im intensiven Teile eine durch den Okularmaßstab meßbare Strecke zu durchlaufen. Durch Schließen des rechten und gleichzeitiges Öffnen des linken Strahles kann man das Partikel zurückbefördern, dann wieder im rechten Strahle zum Passieren derselben Strecke zwingen und auf diese Weise die Zeiten seiner photophoretischen Geschwindigkeit beliebig oft messen.

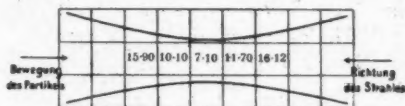


Fig. 3.

Tab. III enthält neben den auf Grund der Messungen von Fallzeiten berechneten Radien der so behandelten Schwefelpartikel, die nach der Beziehung

$$R = \frac{v}{B}$$

errechneten auf sie wirkenden photophoretischen Kräfte.

Aus den Kolonnen 3, 4 und 6 ist es ersichtlich, daß einem Gange der nach wachsenden Fallgeschwindigkeiten, d. h. nach wachsenden Radien angeordneten Partikel ein Gang der Fortführungsgeschwindigkeiten dieser Partikel im Strahle entspricht, und zwar steigen dieselben mit wachsender Größe der Partikel an, erreichen bei Kugeln von Radien $21-28 \cdot 10^{-6}$ cm ihr Maximum und fallen bei größeren Teilchen wieder ab. Derselbe Gang ist daher auch in der photophoretischen Kraft zu sehen (Kolonne 8). Die Einwirkung der Strahlung auf die kleinsten blauen Partikel ist am schwächsten, wird an größeren Teilchen grüner und gelber Farbe immer stärker, erreicht die größte Intensität an den gelblichen Partikeln von der Größe $a = 27,8 \cdot 10^{-6}$ cm und wird an ganz großen Kügelchen wieder schwächer, so daß die Teilchen, deren Radien größer als $4 \cdot 10^{-5}$ cm sind, vom Lichte nur in einem mit den hier verwendeten Hilfsmitteln quantitativ nicht mehr meßbaren Grade affiziert werden.

1) Wie dies F. Ehrenhaft, l. c. angegeben hat.

Tabelle III.¹⁾

Num- mer- des Par- tikels	Beobachtete Farbe	Fallge- schwin- digkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Radien $a \cdot 10^6$ cm		Photo- phoret. Ge- schwin- digkeit $v_p \cdot 10^3$ cm/sec	Be- weg- lich- keit $B \cdot 10^{-7}$	Photo- phoret. Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v_p}{B} \cdot 10^{11}$ Dyne
			Aus dem Wider- stand- gesetz $f = 0$	Aus der optischen Theorie			
42	blau	0,33	9,42	9—11	0,66	4,79	13,75
32	grün	0,42	11,02	11—12	0,88	3,82	23,05
27		0,49	12,16		0,94	3,32	28,30
21		0,59	13,65		1,50	2,82	53,20
34	grüngelb	0,67	14,77	12—13	1,52	2,54	59,80
14	gelb	1,06	19,43	13—15	1,70	1,76	96,50
10		1,08	19,64		1,86	1,74	107,00
30		1,16	20,50		1,87	1,64	114,10
11	orange	1,19	20,80	15—18	2,01	1,62	125,00
4		1,24	21,30		2,21	1,55	142,60
16		1,32	22,12		2,27	1,49	152,40
22	Eigen- farbe	1,46	23,42	von 18 an	2,23	1,38	161,00
20		1,46	23,42		2,31	1,38	167,40
7		1,97	27,77		2,20	1,12	195,50
39		2,13	29,02		1,85	1,06	174,50
26		2,31	30,14		1,36	1,00	136,00
40		3,44	37,92		0,72	0,77	93,50

§ 3. Untersuchung der photophoretischen Wirkung auf Schwefelpartikel bei verschiedenen Gasdrucken.

Um ein weiteres Urteil über die negative photophoretische Kraft zu gewinnen, wurde nach dem Vorgange von Ehrenhaft (l. c.) die Wirkung des Lichtes auf Schwefelpartikel bei verschiedenen Gasdrucken untersucht.

Da die gleiche Farbe der Partikel ein Kriterium für Gleichheit ihrer Größe und Gleichheit ihrer Beweglichkeit liefert, so wurden die Fortführungsgeschwindigkeiten im Strahle zunächst bei verschiedenen Drucken an verschiedenen Partikeln derselben Farbe gemessen. Die Mittelwerte der so gewonnenen Geschwindigkeiten blauer, grüner, orangefarbiger und gelblichweißer Partikel bei Drucken von 760, 456, 354, 143 und 55 mm. Hg geben die den betreffenden Drucken zugehörigen photophoretischen Geschwindigkeiten der Partikel genannter Farbe, d. h. der Partikel eines ganz bestimmten Größenintervalles.

1) Diese Tabelle hat bereits F. Ehrenhaft in seinem Vortrag „Zur Physik des Millionstel Zentimeters“, Physik. Zeitschr. 18. p. 352. 1917) publiziert.

Für die den Farben der so behandelten Partikel entnommenen Radien wurden nun nach dem Widerstandsgesetz für die betreffenden Drucke¹⁾ die Beweglichkeiten B berechnet. Wenn man diese Beweglichkeiten der Partikel bestimmter Farbe als Abszissen und die an Partikeln dieser Farbe bei den zugehörigen Drucken gemessenen Fortführungsgeschwindigkeiten im Strahle als Ordinaten aufträgt (Fig. 4), so erhält man für jede Farbe, d. h. für Partikel gleicher Größe eine

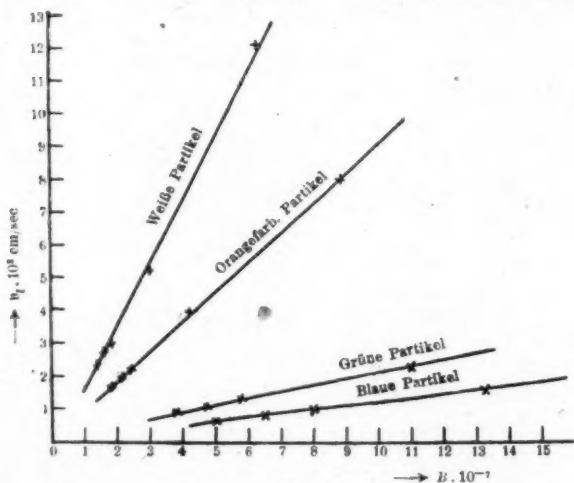


Fig. 4.

Reihe von Punkten, die auf einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden liegen.

Physikalisch interpretiert bedeutet dies folgendes: Durch Verminderung des Druckes des umgebenden Gases werden die Fortführungsgeschwindigkeit des Partikels im Strahle und seine Beweglichkeit in demselben Maße vergrößert, d. h. das Verhältnis beider der Quotient v/B , welcher die Größe der photophoretischen Kraft auf die Partikel betreffender Farbe bei

1) Die mittlere freie Weglänge beim Druck von x mm Hg wurde nach der Beziehung

$$l_x = \frac{l_{760} \cdot x}{760}$$

berechnet.

verschiedenen Drucken angibt, ist konstant und vom Drucke des Gases unabhängig. Tab. IV enthält zahlenmäßig die Resultate dieser Erörterungen.

Tabelle IV.

Druck in mm Hg	Photophore- tische Ge- schwindigkeit $v_1 \cdot 10^3$ cm/sec	Aus dem Stokes- Cunningham- schen Gesetze ($f = 0$) be- rechnete Be- weglichkeit $B \cdot 10^{-7}$	Die photo- phoretische Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v_1}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
Weiße Partikel ($a = 23 \cdot 10^{-6}$ cm)			
760	2,30	1,40	1,70
496	2,68	1,60	1,64
354	2,95	1,80	1,64
143	5,18	3,00	1,73
55	12,00	6,30	1,90
Orange Partikel ($a = 18 \cdot 10^{-6}$ cm)			
760	1,70	1,95	0,87
496	1,97	2,28	0,86
354	2,23	2,65	0,84
143	3,93	4,62	0,85
55	8,08	9,91	0,83
Grüne Partikel ($a = 11 \cdot 10^{-6}$ cm)			
760	0,88	3,79	0,23
496	1,10	4,72	0,23
354	1,29	5,74	0,22
143	2,20	10,98	0,21
55	5,10	25,10	0,21
Blaue Partikel ($a = 9 \cdot 10^{-6}$ cm)			
760	0,60	4,97	0,13
496	0,80	6,48	0,12
354	0,98	7,98	0,12
143	1,57	13,27	0,12
55	4,09	34,25	0,12

Die Konstanz der photophoretischen Kräfte an blauen, grünen und orangefarbenen Schwefelpartikeln ist auf Prozente genau. Es ist begreiflich, daß dies an den gelblichweißen Partikeln in diesem hohen Grade nicht zu erreichen ist; denn bei der Berechnung der Kräfte aus den Mittelwerten der photophoretischen Geschwindigkeiten verschiedener Partikel und aus den den Farben entnommenen Radien werden die Resultate um so genauer, je kleiner das Intervall für die

Radien der Partikel betreffender Farbe ist. Bei kleinen farbigen Schwefelpartikeln ist nun das Intervall der Radien auch wirklich sehr eng; dagegen kann der Radius der gelblichweißen Partikel nicht so präzise angegeben werden, weil die Farbe einen größeren Spielraum für die Größe dieser Partikel zuläßt.¹⁾

Die Ergebnisse genügen aber schon vollständig, um die Tatsache konstatieren zu lassen, daß die negative Photo-phorese an den Partikeln gleicher Farbe, d. h. gleicher Größe, konstant und vom Gasdrucke unabhängig ist, daß also infolgedessen die Fortführung der Materie gegen den einfallenden Strahl einer direkten und unmittelbaren Wirkung des Lichtes zugeschrieben werden muß.

§ 4. Der photophoretische Effekt an Selenpartikeln.

Diese Substanz verdient ein besonderes Interesse, erstens, weil ihre Partikel eine außerordentlich starke lichtnegative Bewegung zeigen, und zweitens, weil unter Umständen auch eine Modifikation entstehen kann, die lichtpositive Partikel liefert.²⁾

Zur Herstellung der Selenkügelchen wurde das amorphe rote Selen in kleinen Mengen in einem kugelförmig erweiterten Glas- oder Quarzrohre (Durchmesser 2,3 cm) mit der Bunsenflamme bis zur Siedetemperatur erhitzt. Die Substanz schmilzt zu einer grauen Masse, die entweichenden roten Dämpfe kondensieren zu kleinen Kugeln, die, im Dunkelfelde beobachtet, schöne blaue, grüne, gelbe und rote Resonanzfarben und große Empfindlichkeit auf die Wirkung des einfallenden Lichtes zeigen.³⁾

1) Zur Berechnung der Beweglichkeit dieser Partikel wurde hier nur derjenige Radius gewählt, dem nach der Tab. III, p. 501, die größte Fortführungsgeschwindigkeit entspricht, d. h. $a = 23 \cdot 10^{-6}$ cm.

2) Vgl. F. Ehrenhaft, l. c.

3) Die kleinsten Partikel sind blau, größere zeigen rein spektrales Grün; bei noch größeren läßt sich die ausgeprägte Na-gelbe Farbe konstatieren. Die Orangefarbe ist schon ziemlich verwaschen und geht an größeren Partikeln in die typisch rötlichen Töne der Eigenfarbe des Selens über.

Auch an diesen lichtnegativen Selenkügelchen (das Partikel Nr. 5 war lichtpositiv) wurde in der p. 492 beschriebenen Weise bei den Gasdrucken 760 und 488 mm Hg im Argon eine Größen- und Ladungsbestimmung unternommen (vgl. I. Parankiewicz, *Physik. Zeitschr.* 18, p. 571. 1917). Es ergaben sich dabei folgende Resultate:

Während sich die Überzahl der Partikel gegen das einfallende Licht bewegt, erscheinen gleich nach der Verdampfung manchmal auch orangerote und rote Partikel, die vom Lichte sehr stark abgestoßen werden. Die systematische Nachforschung

Nummer des Partikels	Beobachtete Farbe	Aus dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze berechnete Radien $a \cdot 10^6$ cm		Aus d. Stokes-Cunninghamschen Gesetze berechnete Leuchtungen $e \cdot 10^{10}$ e.s.t.E.	
		$f = 0$	$f = 1$	$f = 0$	$f = 1$
Normaler Druck					
3	blau	7,28	5,20	+ 0,17	0,06
1		7,44	5,35	+ 0,21	0,08
19		7,57	5,44	+ 0,22	0,08
18	grün	8,35	6,12	+ 0,82	0,32
2		8,84	6,52	- 0,23	0,09
22		9,08	6,76	- 0,08	0,03
9	grüngelb	9,53	7,15	- 0,44	0,19
7		12,62	9,92	+ 0,59	0,28
6		13,07	10,52	+ 1,31	0,67
10	gelb	14,36	11,54	+ 0,75	0,39
21		14,82	11,96	+ 4,62	2,44
5		14,90	12,02	+ 7,32	3,98
4	orange	15,06	12,20	+ 3,51	1,85
20		15,30	12,42	+ 6,02	3,17
11		15,97	12,42	+ 2,03	1,09
8	rot	15,97	13,03	+ 1,62	0,88
		17,07	14,07	- 1,49	0,84
Druck: 488 mm Hg					
14	blau	7,63	5,09		
17	grün	8,86	6,04	- 0,72	0,26
13	grüngelb	11,10	7,90	+ 0,72	0,26
16	gelb	13,50	9,94	+ 0,36	0,14
12	orange	14,14	10,52		
15	rot	16,26	12,42	+ 1,03	0,46

Mit Rücksicht auf spätere Untersuchungen über die Konstanz der photophoretischen Kräfte war es wichtig, die Konstanz der Masse der Selenpartikel festzustellen. Aus vorliegenden Messungen ergab sich z. B. für die Mittelwerte der Fallzeiten am Partikel Nr. 11 $\bar{t}_7^{(1)} = 6,99$ Sek., $\bar{t}_6^{(2)} = 6,89$; am Partikel Nr. 21 $\bar{t}_{17}^{(1)} = 7,91$, $\bar{t}_{14}^{(2)} = 7,87$. Die Masse der lichtnegativen Partikel bleibt demnach im Laufe der Beobachtungszeit konstant; dasselbe läßt sich auch über die Masse des lichtpositiven Partikels Nr. 5 aussagen, an welchem der mittlere Fallwert aus den sieben ersten Fallwerten 7,79 Sek., aus den sieben letzten 7,80 Sek. beträgt. Über eine weitere Untersuchung der Konstanz der Masse der lichtpositiven Selenpartikel, vgl. diese Studie, p. 509.)

ergab, daß das Auftreten dieser lichtpositiven Partikel mit der Erwärmungsdauer des Selen im Siederohre bei der Erzeugung der Probekörper zusammenhängt. Zur vorläufigen Orientierung wurden folgende Daten gesammelt: Nach einer kurzen Erwärmung von 6—10 Sek. erscheinen im Kondensator ausschließlich lichtnegative Partikel aller Farben. Wird das Selen jedoch 10—15 Sek. erwärmt, so treten außer den lichtnegativen auch große, sehr rasch fallende, stark glänzende, lichtpositive Partikel von gelben und roten Resonanzfarben auf, deren photophoretische lichtpositive Geschwindigkeit bedeutend größer als die der lichtnegativen Partikel ist. Es wurde ferner konstatiert, daß einige Minuten nach der Erzeugung diese lichtpositive Bewegung verschwindet und daß alle Partikel sich nur gegen das einfallende Licht bewegen.¹⁾

1) Alle Untersuchungen am Selen sind in einem nach p. 491 beschriebener Weise getrockneten Gase ausgeführt worden. Da aber die Eigenschaften des Selen in hohem Grade durch die Feuchtigkeit beeinflusst werden, so habe ich auch folgenden Versuch ausgeführt:

Unmittelbar vor dem Verdampfungsrohre mit Selen wurde eine Flasche mit Wasser eingeschaltet und das Phänomen in feuchter Stickstoffatmosphäre beobachtet. Nach einer längeren Erwärmung des Selen im Siederohre wurden Selenpartikel vom Stickstoffstrom mitgerissen; es ließen sich an denselben wieder alle für das Selen typischen Erscheinungen konstatieren. Die kleinsten blauen und grünen Partikel waren immer lichtnegativ, orangefarbige und rote Partikel sowohl lichtnegativ als auch lichtpositiv. Die Feuchtigkeit beeinflusst also weder das Auftreten beider Arten der Photophorese noch die Abhängigkeit des Entstehens lichtpositiver und lichtnegativer Probekörper von der Erwärmungsdauer des Selen im Rohre; die lichtpositive und lichtnegative Bewegung wird nur merklich schwächer. Die anhaftenden Wasserschichten vergrößern nämlich die Masse des Partikels, d. h. verkleinern seine Beweglichkeit; da man aber berechtigt ist anzunehmen, daß die Kraft des Lichtes nur auf das Selen und nicht auf das Wasser wirkt (Kondensationsprodukte sind nämlich lichtneutral), d. h., daß der Quotient

$$\frac{v}{B}$$

mit oder ohne Wasserhülle denselben Wert haben muß, so kann man auf diese Weise die Verkleinerung der photophoretischen Geschwindigkeit der Selenpartikel erklären. Als ein weiteres Argument für die Richtigkeit dieser Annahme läßt sich anführen, daß auch die Farben der Selenpartikel im feuchten Gase weniger intensiv und etwas blässer erscheinen.

Die Feuchtigkeit beeinflusst also nicht das Wesen der Erscheinung, höchstens in einem geringen Grade die Intensität derselben.

§ 5. Quantitative Untersuchung des Effektes.

a) Lichtpositive Selenmodifikation.

Es war daher interessant, einzelne solcher lichtpositiver Selenpartikel einer genaueren Untersuchung zu unterziehen und insbesondere die auf sie im Laufe einer längeren Zeit wirkende Kraft dadurch zu bestimmen, daß die photophoretische Geschwindigkeit an einzelnen größeren Partikeln zu wiederholten Malen in möglichst derselben Zone des Strahles gemessen wurde. Es haben sich an den Partikeln I—III folgende Tatsachen ergeben: Partikel Nr. I wurde 5 Minuten lang behandelt; die Zeiten, in welchen der Probekörper über

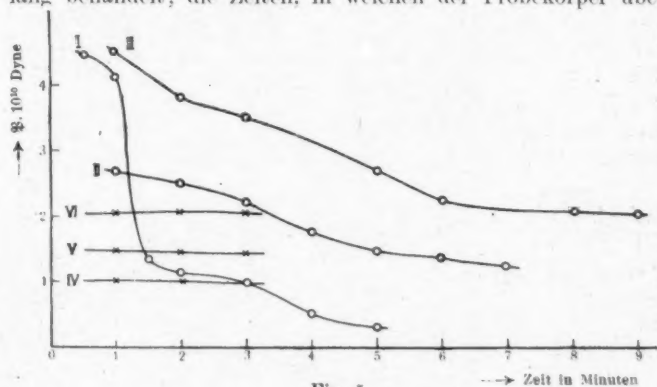


Fig. 5.

die Strecke $11,8 \cdot 10^{-3}$ cm vom Lichte gedrückt wurde, nahmen in dieser Beobachtungszeit ständig von 0,93 bis 17,48 Sek. zu. Die Geschwindigkeit, mit der sich das Partikel im Strahle bewegte, nahm also von $11,00 \cdot 10^{-3}$ bis $0,67 \cdot 10^{-3}$ cm/sec ab. Um den Verlauf dieser Abnahme genauer feststellen zu können, wurden die photophoretischen Geschwindigkeiten v und die auf das Partikel wirkenden Kräfte

$$\mathfrak{P} = \frac{v}{B}$$

von Minute zu Minute berechnet.¹⁾ Es ergibt sich folgender Gang dieser Abnahme (vgl. Fig. 5, Kurve I).

1) Zur Berechnung der Beweglichkeit B der Partikel wurde der mittlere Radius der orangefarbenen Selenpartikel $a = 15 \cdot 10^{-6}$ cm verwendet. Die in einzelnen Minuten gemessenen Werte der Fortführungszeiten lassen sich auf dem Registrierstreifen ablesen.

1. Hälfte der 1. Minute	$v_{I_1} = 10,93 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathfrak{P}_{I_1} = 4,37 \cdot 10^{-10}$ Dyne
2. „ „ 1. „	$v_{I_2} = 10,50$ „ „	$\mathfrak{P}_{I_2} = 4,20$ „ „
1. „ „ 2. „	$v_{II_1} = 3,09$ „ „	$\mathfrak{P}_{II_1} = 1,24$ „ „
2. „ „ 2. „	$v_{II_2} = 2,92$ „ „	$\mathfrak{P}_{II_2} = 1,17$ „ „
3. Minute	$v_{III} = 2,58$ „ „	$\mathfrak{P}_{III} = 1,03$ „ „
4. „	$v_{IV} = 1,23$ „ „	$\mathfrak{P}_{IV} = 0,49$ „ „
5. „	$v_V = 0,67$ „ „	$\mathfrak{P}_V = 0,27$ „ „

Die Abnahme der lichtpositiven Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{v}{B}$$

ist also in der angegebenen Beobachtungszeit ganz beträchtlich; denn im Laufe der zweiten Minute fiel sie schon auf den dritten Teil. In folgenden drei Minuten ging die Abnahme weniger intensiv vor sich. Die Kräfte verkleinern sich im großen und ganzen fast regelmäßig um ca. 50 Proz. des Anfangswertes.

Am Partikel Nr. II (in Stickstoff) wird nun die Tatsache bestätigt, daß die Stärke der Reaktion der lichtpositiven Selenpartikel auf die Wirkung der einfallenden Strahlungenergie eine Funktion der Zeit ist. Die Abnahme der Kraft \mathfrak{P} ist hier aber eine fast lineare, wie die von Minute zu Minute angegebenen Werte der photophoretischen Geschwindigkeiten v und der Kraft \mathfrak{P} (Fig. 5, Kurve II) illustrieren.

$v_1 = 8,18 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathfrak{P}_1 = 2,63 \cdot 10^{-10}$ Dyne
$v_2 = 7,96$ „ „	$\mathfrak{P}_2 = 2,56$ „ „
$v_3 = 6,93$ „ „	$\mathfrak{P}_3 = 2,23$ „ „
$v_4 = 5,47$ „ „	$\mathfrak{P}_4 = 1,76$ „ „
$v_5 = 4,59$ „ „	$\mathfrak{P}_5 = 1,48$ „ „
$v_6 = 4,38$ „ „	$\mathfrak{P}_6 = 1,41$ „ „
$v_7 = 3,76$ „ „	$\mathfrak{P}_7 = 1,21$ „ „

Da sich das Bild der lichtpositiven Partikel während dieser Messungen nicht ändert, so war es von vornherein evident, daß es sich hier nur um eine Änderung der Reaktion auf das Licht handeln kann und nicht um irgendein Sekundärphänomen, etwa um Änderung der Beweglichkeit (Abnahme der Masse der Partikel); gleichwohl wurden aber am Partikel Nr. III (in Stickstoff), um die Konstanz seiner Masse feststellen zu können, abwechselnd die Fallzeiten und die Zeiten der Fortführung im Strahle gemessen,

wobei dieser Probekörper durch 10 Min. behandelt wurde. Aus 26 Fallzeiten ergibt sich dessen Radius zu $a = 18,18 \cdot 10^{-6}$ cm; aus den ersten 13 Zeiten zu $a = 18,20 \cdot 10^{-6}$ cm, aus den letzten 13 zu $a = 18,17 \cdot 10^{-6}$ cm. Die Konstanz der Masse dieses Partikels läßt sich aber noch präziser feststellen: aus den ersten drei Fallzeiten im Laufe der zweiten Beobachtungsminute (in der ersten Minute wurde nur die Fortführung im Strahle gemessen) ergibt sich die mittlere Fallgeschwindigkeit $v_f = 2,54 \cdot 10^{-3}$ cm/sec, aus den letzten vier Fallzeiten in der achten Minute die mittlere Fallgeschwindigkeit $v_f = 2,55 \cdot 10^{-3}$ cm/sec, während die mittlere Fallgeschwindigkeit im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $\bar{v}_f = 2,55 \cdot 10^{-3}$ cm/sec beträgt. Daraus erhellt, daß die Masse des Partikels auf Promille konstant blieb. Dessenungeachtet nimmt die Reaktionsfähigkeit des Partikels auf den Druck des Strahles stets ab, wie aus nachfolgender Zusammenstellung hervorgeht (Fig. 5, Kurve III; die Indizes bedeuten die zugehörigen Minuten):

$v_1 = 10,73 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathcal{P}_1 = 4,46 \cdot 10^{-10}$ Dyne
$v_2 = 9,14$ „ „	$\mathcal{P}_2 = 3,80$ „ „
$v_3 = 8,54$ „ „	$\mathcal{P}_3 = 3,55$ „ „
$v_5 = 6,47$ „ „	$\mathcal{P}_5 = 2,68$ „ „
$v_6 = 5,37$ „ „	$\mathcal{P}_6 = 2,23$ „ „
$v_8 = 5,16$ „ „	$\mathcal{P}_8 = 2,14$ „ „
$v_9 = 4,92$ „ „	$\mathcal{P}_9 = 2,04$ „ „

Diese Tatsachen scheinen darauf hinzuweisen, daß hier eine Umwandlung der lichtpositiven Selenmodifikation vorliegt. Die Umwandlung geht bei konstanter Zimmertemperatur¹⁾ vor sich und kann entweder dadurch hervorgerufen werden, daß sich unter dem Einflusse des Lichtes irgendwelche Eigenschaft des Selen ändert, wie dies aus anderen am Selen beobachtbaren physikalischen Erscheinungen bereits bekannt ist, oder dadurch, daß die lichtpositive Selenmodifikation an sich,

1) Sämtliche Messungen wurden nach Herstellung des Temperaturgleichgewichtes ausgeführt. Die im Siederohr erzeugten Selenpartikel wurden auf konstante Temperatur dadurch gebracht, daß sie vor dem Kondensator ein längeres, im Wasserbad von Zimmertemperatur eingetauchtes Cu-Rohr passierten.

ohne irgendwelchen äußeren Einfluß, in eine stabilere Modifikation übergeht, die nicht in so hohem Grade lichtpositiv ist. Diesbezüglich möchte ich auf folgende Eigenschaft der graukristallinen Selenmodifikation hinweisen¹⁾. Wird das graukristallinische Selen von hoher Temperatur (über 200° C) plötzlich auf Zimmertemperatur abgekühlt, so steigt seine elektrische Leitfähigkeit bis zu einem Maximum an, wird dann immer kleiner und verschwindet nach kurzer Zeit. In dem Zustande der größten Leitfähigkeit besitzt diese Modifikation des Selens die Eigenschaften der Metalle, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß eben diese Modifikation die stark lichtpositiven Partikel liefert, die dann allmählich verschwinden.²⁾

Die weitere Erörterung muß zukünftigen Untersuchungen vorbehalten werden; es ist nur sicher, daß hier die Abnahme der positiven photophoretischen Kraft Φ an Selenpartikeln nicht durch äußere Umstände, sondern durch Vorgänge im Inneren der lichtpositiven Partikel hervorgerufen wird.

1) Chr. Ries, „Die elektrischen Eigenschaften und die Bedeutung des Selens“, p. 13.

2) Die Untersuchungen über das Verhalten der lichtpositiven Selenpartikel erklären nun die p. 506 erwähnte Beobachtung, daß nach einer Zeit von wenigen Minuten die lichtpositiven Partikel im Kondensator verschwinden, während die lichtnegativen Probekörper noch andauernd beobachtbar sind. Dies geht zum Teil auf den Umstand zurück, daß die sich rasch bewegenden lichtpositiven Selenpartikel vom Lichtstrahle wegtransportiert und aus dem Gesichtsfelde rasch verdrängt werden, zum größeren Teile aber auf die Tatsache, daß die Bewegung der lichtpositiven Partikel im Strahle an und für sich abnimmt. An manchen solchen positiven Selenpartikeln habe ich sogar beobachtet, daß ihre Reaktionsfähigkeit auf das Licht nach einer längeren Zeit (ca. 20 Min.) fast vollkommen verschwindet; die lichtpositiven Probekörper sind dann beinahe lichtneutral geworden.

Auch kann man an den im Siederohre noch vorhandenen Selenpartikeln, die erst einige Minuten nach der Erzeugung in den Kondensator gebracht werden, feststellen, daß fast alle Partikel lichtnegativ sind, manche auch lichtneutral, während die lichtpositive Bewegung manchmal ausbleibt oder nur sehr schwach wird.

Diese Tatsachen scheinen darauf hinzuweisen, daß die Umwandlung der lichtpositiven Selenmodifikation in eine durch das Licht weniger erregbare Modifikation auch an sich ohne Einfluß des Lichtes stattfindet.

b) Lichtnegative Selenmodifikation.

Nach einem ähnlichen Verfahren wie bei Schwefelpartikeln wurden auch an einzelnen lichtnegativen Seleneteilchen Messungen von Fallserien und Lichtdruckserien ausgeführt; dabei ergaben sich die folgenden in der Tab. V zusammengestellten Resultate.

Tabelle V.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Nach Stokes-Cunningham'schen Gesetze ($f=0$) berechneter Radius $a \cdot 10^6$ cm	Photophoretische Geschwindigkeit $v_t \cdot 10^3$ cm/sec	Beweglichkeit $B \cdot 10^{-7}$	Photophoretische Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v_t}{B} \cdot 10^{12}$ Dyne
3	blau	0,48	7,28	1,12	7,07	15,85
1		0,50	7,44	1,20	6,84	17,54
22	grün	0,67	9,08	2,96	5,06	58,50
9		0,72	9,53	2,14	4,72	45,30
7	gelbgrün	1,12	12,62	3,23	3,15	102,90
6	gelb	1,18	13,07	4,07	3,01	135,20
10	orange	1,38	14,36	6,48	2,65	244,50
20		1,53	15,30	11,72	2,42	484,50
11	rot	1,64	15,97	10,35	2,28	454,00
8		1,83	17,07	5,99	2,09	286,50

Aus dieser ist ersichtlich, daß auch die lichtnegative photophoretische Kraft auf Selenpartikel von der Größe derselben abhängt und ein Maximum der Wirkung bei Kügelchen vom Radius $15-16 \cdot 10^{-6}$ cm besitzt. Sie beträgt für Partikel dieser Größe $4,8 \cdot 10^{-10}$ Dyne, ist also ungefähr sechsmal größer als die auf Schwefelkugeln gleicher Beweglichkeit wirkende Kraft desselben Strahles. Die Intensität des lichtnegativen Effektes hängt demnach bei Probekörpern gleicher Beweglichkeit von den chemisch-physikalischen Eigenschaften derselben ab; sie ist also eine Eigenschaft der Materie.

Um ferner die Abhängigkeit dieser Kräfte von der Zeit feststellen zu können, wurden die lichtnegativen Selenpartikel IV—VI (in Stickstoff, Fig. 5, p. 507) zunächst ebenso wie die lichtpositiven behandelt, d. h. es wurde die zeitliche Konstanz der negativen photophoretischen Kraft an einem und demselben Teilchen durch wiederholte Messung seiner Fortführungsgeschwindigkeit im Strahle untersucht.

An dem orangefarbigen Partikel Nr. VI ergaben sich in einzelnen Minuten folgende Werte der Geschwindigkeiten und der Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{v}{B}$$

(Fig. 5, Kurve VI; $a = 15 \cdot 10^{-3}$ cm):

$v_1 = 6,39 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathfrak{P}_1 = 2,05 \cdot 10^{-10}$ Dyne
$v_2 = 6,57$ „ „	$\mathfrak{P}_2 = 2,11$ „ „
$v_3 = 6,36$ „ „	$\mathfrak{P}_3 = 2,05$ „ „

In der ganzen Beobachtungszeit bleibt die gemessene Geschwindigkeit und daher die Kraft \mathfrak{P} vollkommen konstant, während die photophoretische Kraft auf lichtpositive Partikel in gleicher Zeit (wie dies aus Fig. 5 ersichtlich ist) bedeutend abnimmt. Dasselbe bestätigen auch die Beobachtungen an den Partikeln Nr. IV und V.

Partikel Nr. IV (gelb, $a = 13 \cdot 10^{-6}$ cm).

$v_1 = 3,14 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathfrak{P}_1 = 1,01 \cdot 10^{-10}$ Dyne
$v_2 = 3,13$ „ „	$\mathfrak{P}_2 = 1,01$ „ „
$v_3 = 3,08$ „ „	$\mathfrak{P}_3 = 0,99$ „ „

Partikel Nr. V (orange).

$v_1 = 4,50 \cdot 10^{-3}$ cm/sec	$\mathfrak{P}_1 = 1,45 \cdot 10^{-10}$ Dyne
$v_2 = 4,24$ „ „	$\mathfrak{P}_2 = 1,36$ „ „
$v_3 = 4,33$ „ „	$\mathfrak{P}_3 = 1,39$ „ „

Während also die Reaktionsfähigkeit lichtpositiver Selenpartikel auf das Licht mit der Zeit abnimmt, bleibt die Wirkung auf lichtnegative Selenteilchen konstant; sie ist von der Zeit unabhängig.¹⁾

Nunmehr erübrigt es, die Untersuchung der Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte auf lichtnegative Selenteilchen von der chemischen Beschaffenheit und vom Drucke des die Probekörper umgebenden Gases vorzunehmen.

Um diese Abhängigkeit feststellen zu können, wurden die Selenpartikel im Argon, im Stickstoff und im Wasserstoff untersucht. Schon der qualitative Eindruck läßt erkennen,

1) Bezüglich der Konstanz der Masse der lichtnegativen Selenpartikel verweise ich auf die Anmerkung p. 505.

daß unter sonst gleichen Verhältnissen die Bewegung der Partikel im Stickstoff eine lebhaftere als im Argon, im Wasserstoff wiederum eine bedeutend lebhaftere als im Stickstoff ist. Nun wurden an Partikeln gleicher Farbe in allen drei Gasen die Fallgeschwindigkeiten und die photophoretischen Geschwindigkeiten auch gemessen.¹⁾

Die Resultate dieser Messungen sollen an folgenden annähernd gleich großen Partikeln besprochen werden:

Nr. des Partikels	Gas	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Photophoret. Geschwindigkeit $v_l \cdot 10^3$ cm/sec	Beweglichkeit $B \cdot 10^{-7}$	Photophoret. Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
20	Argon	rot	1,53	15,30	11,72	2,42	4,85
VII	Stickstoff	rot	1,91	15,26	14,37	3,05	4,70
3*	Wasserstoff	rot	5,16	15,15	38,68	8,09	4,78

1) Diese Messungen ergaben an lichtnegativen Selenpartikeln im Wasserstoff folgende Resultate:

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Beweglichkeit $B \cdot 10^{-7}$	Photophoret. Geschwindigkeit $v_l \cdot 10^3$ cm/sec	Photophoretische Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
2*	orange	4,07	13,22	9,86	24,08	2,42
1*		4,49	14,14	9,00	26,20	2,91
4*	rot	4,71	14,61	8,84	30,22	3,54
3*		5,16	15,15	8,09	38,68	4,78
5*		6,23	17,58	6,49	30,22	4,66

Der Vergleich mit der Tabelle in der Anmerkung p. 505, mit der Tab. V, p. 511, und mit der Tab. VI, p. 515, lehrt:

1. Daß für orangefarbige und rote Selenpartikel in allen drei Gasen gleiche Intervalle für Radiengrößen resultieren.

2. Daß die Werte der photophoretischen Kräfte auf orangefarbige und rote Partikel in allen drei Medien vollkommen übereinstimmen.

3. Daß sich auch im Wasserstoff ein Maximum der photophoretischen Kräfte an dem Partikel vom Radius $15 \cdot 10^{-6}$ cm ergibt, also am Partikel jener Größe, an welcher schon in Argon (Tab. V) und in Stickstoff (p. 516) die maximale Wirkung des Lichtes konstatiert werden konnte.

Partikel gleicher Farbe haben die größte Fallgeschwindigkeit im Wasserstoff, eine kleinere im Stickstoff, die kleinste im Argon; ihre nach dem Widerstandsgesetze berechneten Radien sind gleich. Denselben Gang wie bei der Fallgeschwindigkeit sieht man auch an den photophoretischen Geschwindigkeiten; ein Partikel bewegt sich im Strahle im Wasserstoff mit einer Geschwindigkeit, die um 165 Proz. größer ist als die Geschwindigkeit eines gleich großen Probekörpers im Stickstoff, und diese Geschwindigkeit übertrifft die photophoretische Geschwindigkeit im Argon wieder um ca. 20 Proz. Entsprechend verhalten sich auch die Beweglichkeiten der Partikel gleicher Größe. Die photophoretischen Kräfte bleiben aber konstant.

Aus dieser Tatsache muß geschlossen werden, daß auf Partikel gleicher Größe auch in verschiedenen gasförmigen Medien vom Lichte desselben Strahles gleiche Kräfte ausgeübt werden, daß also die photophoretische Kraft vom umgebenden Medium unabhängig ist.

Die Untersuchungen über die Abhängigkeit dieser Kräfte vom *Drucke* des Gases im Kondensator wurden an *einem und demselben* lichtnegativen Selenpartikel bei verschiedenen Drucken, also noch exakter, als dies beim Schwefel ausgeführt worden ist, durchgeführt.

Zu diesem Zwecke wurden einzelne Selenteilechen folgendermaßen behandelt: Es wurden zunächst die Fallgeschwindigkeit und die Fortführungszeiten im Strahle an einem Probekörper bei Atmosphärendruck gemessen; sodann wurde an die Kondensatorplatten eine elektrische Spannung angelegt und der Kondensator gleichzeitig mit größter Vorsicht so evakuiert, daß nur eine langsame Strömung der übrigen im Kondensator noch vorhandenen Partikel sichtbar war, während der der Messung unterzogene Probekörper durch Vergrößerung der Wirkung des elektrischen Feldes der Strömung entgegen gezogen wurde. Als der Gasdruck genügend erniedrigt war, wurde die Verbindung mit der Pumpe abgestellt. Im Kondensator befand sich nun das bereits beim Atmosphärendrucke behandelte Partikel, dessen Fallgeschwindigkeit im Schwerfeld und Fortführungsgeschwindigkeit im Strahle jetzt bei einem niedrigeren (am Manometer ablesbaren) Drucke gemessen werden konnte. Bei einigen Partikeln konnte ich solche Messungen sogar bei drei oder vier verschiedenen Gas-

drucken ausführen. So war es möglich, erstens die Größe und damit die Beweglichkeit desselben Partikels aus seinen Fallgeschwindigkeiten bei verschiedenen Drucken nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze zu berechnen, und zweitens aus den bei verschiedenen Drucken gemessenen Fortführungsgeschwindigkeiten desselben Partikels im Strahle und der aus seiner Größe für den betreffenden Druck folgenden Beweglichkeit die photophoretischen Kräfte an einem und demselben Partikel bei verschiedenen Drucken zu bestimmen.

Die Selenpartikel, welche auf diese Art und Weise behandelt worden sind, sind in der Tab. VI zusammengestellt.¹⁾

Tabelle VI.

Nr. des Partikels	Beobachtete Farbe	Druck in mm Hg	Fallgeschwindigkeit $v_f \cdot 10^3$ cm/sec	Nach Stokes-Cunninghamschen Gesetze ($f=0$) berechneter Radius $a \cdot 10^6$ cm	Photophoretische Geschwindigkeit $v_l \cdot 10^3$ cm/sec	Bezugswert $B \cdot 10^{-7}$	Photophoretische Kraft $\mathfrak{P} = \frac{v_l}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
IV*	gelb	760	0,89	10,96	4,59	3,85	1,93
		439			6,24	5,08	1,23
III*	gelb	586	1,23	12,49	4,47	3,59	1,21
		366			5,73	4,59	1,25
II*	orange	760	1,33	14,07	7,33	2,71	2,70
		464			9,22	3,35	2,75
V*	orange	760	1,34	14,14	7,43	2,69	2,76
		550	1,52	14,07	8,74	3,10	2,82
		760	1,38	14,38	8,80	2,63	3,35
VI*	orange	490	1,68	14,47	10,83	3,14	3,45
		439	1,75	14,34	11,70	3,36	3,48
		340	2,00	14,34	13,30	3,85	3,46
I*	orange	760	1,58	15,64	6,78	2,35	2,89
		585	1,80	15,82	7,47	2,56	2,90

1) Die Kolonne 5 der Tab. VI zeigt, daß sich die bei verschiedenen Drucken aus den Fallgeschwindigkeiten nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze ($f=0$) berechneten Radien derselben Partikel auf Prozente konstant ergeben; das Widerstandsgesetz liefert demnach im untersuchten Intervalle der Gasdrucke von 760–340 mm Hg, von letzteren unabhängig, immer dieselben Werte der Radien der gemessenen Partikel. Auf diesem Wege ist also ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit und Anwendbarkeit des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes für die Größenbestimmung der Teilchen in der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} cm Radius erbracht worden (vgl. I. Parankiewicz, Physik. Zeitschr. 19, p. 280. 1918).

Aus der Kolonne 8 ist ersichtlich, daß die bei verschiedenen Drucken an einem und demselben Partikel gemessenen photophoretischen Kräfte vollkommen konstant, d. h. von dem Drucke des umgebenden Gases unabhängig sind. Ferner ergibt auch diese Untersuchungsweise in Übereinstimmung mit den aus der Tab. V und aus den Resultaten der Untersuchung vom Selen im Wasserstoff (p. 513) gezogenen Schlüssen naturgemäß ein Maximum der lichtnegativen photophoretischen Kraft an Selenpartikeln vom Radius ca. $15 \cdot 10^{-6}$ cm.

Die Untersuchungen der negativen Photophorese an Selenpartikeln, die einesteils auf Messungen der photophoretischen Geschwindigkeit desselben Partikels durch eine längere Zeit bei demselben Drucke, anderenteils auf Behandlung eines und desselben Partikels bei verschiedenen Gasdrucken beruhen, ergeben also den exakten Nachweis der Unabhängigkeit dieser lichtnegativen Kräfte von der Zeit, von der chemischen Beschaffenheit und von dem Drucke der die Probekörper umgebenden Gase.

Zusammenfassung.

Im Anschluß an die Untersuchungen von Ehrenhaft, welcher die lichtpositive und lichtnegative photophoretische Wirkung auf die Materie aufgefunden hat, wurde an durch Verdampfung hergestellten Schwefel- und Selenpartikeln der Größenordnung $8-60 \cdot 10^{-6}$ cm Radius die Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte vom Material der Probekörper, von der Größe derselben, von der Zeit, von der Natur und vom Drucke des die Probekörper umgebenden Gases untersucht.

Zur quantitativen Bestimmung der photophoretischen Kräfte ist eine Größenbestimmung der Probekörper (Beweglichkeitsbestimmung) und die Messung der photophoretischen Geschwindigkeit derselben im Strahle erforderlich. Die letztere wurde nach der von Ehrenhaft angegebenen Methode bestimmt; der Größenbestimmung liegt das Stokes-Cunninghamsche Gesetz zugrunde, da die eigens zu diesem Zwecke an Schwefelpartikeln ausgeführten Untersuchungen und der Vergleich der nach diesem Gesetze aus der Fallgeschwindigkeit resultierenden Radien mit den Ergebnissen der Größenbestimmung nach der Beugungstheorie des Lichtes die An-

wendbarkeit und Gültigkeit * dieses Gesetzes erneuert ergaben.

Die photophoretischen Kräfte werden nun auf folgendem Wege untersucht.

1. Die Behandlung von zwei verschiedenen Materialien, Schwefel und Selen, in einem und demselben Medium ermöglichte es, die Intensitäten der photophoretischen Kräfte desselben Strahles auf Partikel verschiedener Materialien und gleicher Beweglichkeit zu vergleichen.

2. Der Zusammenhang zwischen den Fallgeschwindigkeiten (Größen) der Partikel eines Materiales in einem bestimmten Medium und den photophoretischen Geschwindigkeiten derselben Partikel gestattet eine Aussage über die Abhängigkeit der photophoretischen Kraft von der Größe der Partikel.

3. Die Abhängigkeit der photophoretischen Kraft von der Zeit wurde durch wiederholte Messung der photophoretischen Geschwindigkeit eines und desselben Partikels untersucht.

4. Die Ergebnisse der Bestimmung der photophoretischen Wirkung auf gleiche Partikel desselben Materiales in verschiedenen Gasen (Argon, Stickstoff und Wasserstoff) erlaubt den eventuellen Einfluß des umgebenden Mediums auf die photophoretische Kraft festzustellen.

5. Die Abhängigkeit dieser Kraft vom Drucke des umgebenden Gases wurde an Schwefelpartikeln unter Zugrundelegung der Tatsache, daß gleichfarbige Partikel auch gleich groß sind, dadurch untersucht, daß die photophoretischen Kräfte aus den Mittelwerten der bei verschiedenen Drucken gemessenen Fortführungsgeschwindigkeiten verschiedener gleichfarbiger Partikel und aus den den Farben entnommenen Radien der Partikel berechnet wurden. An Selenpartikeln wurde der Nachweis noch exakter geführt, indem an einem und demselben Partikel die photophoretische Geschwindigkeit und die Beweglichkeit bei verschiedenen Drucken bestimmt wurden.

Diese Untersuchungen über die photophoretischen Kräfte ergaben folgende Resultate:

1. Schwefelpartikel bewegen sich immer zum einfallenden Lichte hin; sie sind lichtnegativ. Selenpartikel sind lichtnegativ oder lichtpositiv, je nach der Erwärmungsdauer des Sels bei Erzeugung der Partikel.

2. Die lichtnegative photophoretische Kraft auf Selenpartikel ist ca. 6mal größer als die Kraft desselben Strahls auf Schwefelpartikel gleicher Beweglichkeit.

3. Die Intensität, mit der Partikel desselben Materiales auf das Licht reagieren, ist von der Größe der Partikel abhängig. Die negative Photophorese weist an Schwefelpartikeln vom Radius $27 \cdot 10^{-6}$ cm, an Selenpartikeln vom Radius $15 \cdot 10^{-6}$ cm eine maximale Wirkung auf.

4. Die photophoretische Kraft auf Schwefel- und lichtnegative Selenpartikel ist von der Zeit unabhängig. Der photophoretische Effekt auf lichtpositive Selenpartikel ist aber eine Funktion der Zeit. Die Reaktionsfähigkeit der lichtpositiven Selenpartikel auf das Licht nimmt mit der Zeit ab, was auf eine auch aus anderen Gebieten der Physik für gewisse Selenmodifikationen bereits bekannte Umwandlung dieser Selenmodifikation in eine scheinbar stabilere, durch die abstoßende Wirkung des Lichtes weniger erregbare, hinweist.

5. Die Größe der photophoretischen Kraft ist weder von der Qualität des umgebenden Gases noch von seinem Drucke abhängig.

6. Die Unabhängigkeit der photophoretischen Kraft vom Drucke und von der chemischen Beschaffenheit des umgebenden Mediums, die Abnahme der lichtpositiven photophoretischen Reaktion der Selenpartikel, die nicht äußeren Umständen, sondern Umwandlungen im Inneren der Partikel zugeschrieben werden muß; ferner die Tatsache, daß Partikel gleicher Beweglichkeit, aber verschiedener Materialien in verschieden hohem Grade von derselben einfallenden Strahlungsenergie beeinflußt werden, bestätigen die Schlußfolgerungen Ehrenhafts und geben zum Teil neue Beweise für die von Ehrenhaft gezogenen Schlüsse, daß es sich sowohl bei den lichtpositiven wie auch bei den lichtnegativen photophoretischen Kräften auf die Materie um Kraftwirkungen erster Art, also um direkte Einwirkung der Strahlung auf die Materie, handelt.

Wien, I. Physik. Institut, Juni 1918.

(Eingegangen 8. Juli 1918.)

2. Die Randbelegungsmethode zur Lösung von Potential- und Schwingungsproblemen; von A. Landé.

Inhalt. § 1. Die erste Randwertaufgabe als Influenzproblem. — § 2. Asymptotische Lösung der Integralgleichung für die Belegungsdichte. — § 3. Zweite Darstellung der Näherungsmethode; die Güte der Approximationen. — § 4. Beweis der Konvergenz für die Potentialgleichung. — § 5. Ein anderes Näherungsprinzip; Vergleich mit der Methode von W. Ritz. — § 6. Die Schwingungsgleichung. — § 7. Vergleich mit der Kirchhoffschen Näherung. — Anhang. Beispiel eines Influenz- und eines Beugungsproblems.

Nach dem Greenschen Satz läßt sich die in einem Punkte beobachtete Lichtschwingung auffassen als Überlagerung von Wirkungen, welche von einer beliebigen den Punkt einschließenden Fläche herrühren. Zur Lösung von optischen Beugungsproblemen legt Kirchhoff diese Fläche speziell durch den beugenden Schirm und seine Lücken und nimmt näherungsweise an, daß auf der Schattenseite des Schirmes absolute Dunkelheit herrsche, dagegen auf einer die Lücken überspannenden Fläche die ungestörte Lichtschwingung vorhanden sei, d. i. diejenige Phase und Amplitude, welche sich bei Abwesenheit des Schirmes dort vorfinden würde.

Vom Standpunkt der exakten Theorie ist die Kirchhoffsche Näherung als das erste Glied einer unendlichen Reihe aufzufassen, deren folgende Glieder schrittweise zur Verbesserung der Lösung führen. Eine solche Reihenentwicklung, deren erstes Glied nahe mit der Kirchhoffschen Lösung verwandt ist, und deren Glieder durch einfache Integrationen (Quadraturen) auch in praktischen Fällen hergestellt werden können, soll im folgenden angegeben werden. Ihr entspricht eine analoge Reihe für dasjenige elektrostatische Problem, bei welchem ein leitender Körper in ein gegebenes Feld hineingebracht wird und dasselbe stört. Die exakte Lösung ist im

elektrostatischen wie im optischen Fall eindeutig bestimmt als Lösung eines *Randwertproblems* der Potential- bzw. der Schwingungsgleichung.

§ 1. Die erste Randwertaufgabe als Influenzproblem.

Die Lösung eines Randwertproblems der Potentialgleichung

$$(a) \quad \Delta U = 0$$

und der Schwingungsgleichung

$$(b) \quad \Delta U + U = 0$$

für ein endliches oder unendliches Gebiet mit vorgegebenen Quellen im Innern des Gebiets kann dadurch gewonnen werden, daß man die Randwertaufgabe als Influenzproblem behandelt¹⁾: $f_1(P)$ sei die in einem Aufpunkt P hervorgerufene Wirkung der vorgegebenen Quellen bei Abwesenheit des störenden Randes, $K^{(1)}(r_{s^*P})$ die Wirkung einer im Randpunkt s^* angebrachten Einheitsquelle. Sind solche Einheitsquellen $K^{(1)}$ mit der Dichte $\sigma(s^*)$ über den Rand $\int ds^*$ verteilt, so ist die Gesamtwirkung im Aufpunkt P gleich

$$(i) \quad U(P) = f_1(P) + \int K^{(1)}(r_{s^*P}) \sigma(s^*) ds^*.$$

Rückt P in einen Randpunkt s hinein, so soll dort die Bedingung

$$U(s) = 0$$

erfüllt sein (erste Randwertaufgabe). Es soll also identisch in jedem Randpunkt s

$$(1') \quad 0 = f_1(s) + \int K^{(1)}(r_{s^*s}) \sigma(s^*) ds^*$$

gelten. Das ist eine Bestimmungsgleichung für die noch unbekannte Belegungsdichte $\sigma(s^*)$. Die Integration erstreckt sich hier wie überall im folgenden über den ganzen Rand s .

Als Einheitsquellen $K^{(1)}$ gehören zu der Potentialgleichung (a)

$$(a') \quad \begin{cases} K^{(1)} = \ln \frac{1}{r} & \text{(2-dimensionales Problem),} \\ K^{(1)} = \frac{1}{r} & \text{(3-dimensionales Problem),} \end{cases}$$

1) F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials, Kap. 9–10. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

zu der Schwingungsgleichung (b) — $H_0^{-1}(r)$ soll die nullte Hankelsche Funktion erster Art bedeuten —

$$(b') \quad \begin{cases} K = H_0^{-1}(r) \text{ (2-dimensionales Problem),} \\ K = e^{i\sqrt{r}}/r \text{ (3-dimensionales Problem).} \end{cases}$$

Diese erfüllen im Falle (a) im Unendlichen die zur Eindeutigkeit der Lösung nötige

Endlichkeitsbedingung

$$(a'') \quad \begin{cases} \lim_{r=\infty}^{(1)} K \cdot \frac{1}{\ln 1/r} \neq \infty, \\ \lim_{r=\infty}^{(1)} K \cdot \frac{1}{1/r} \neq \infty, \end{cases}$$

bzw. im Fall (b) die

Endlichkeitsbedingung und die Ausstrahlungsbedingung¹⁾

$$(b'') \quad \begin{cases} \lim_{r=\infty}^{(1)} K \cdot \sqrt{r} \neq \infty, & \lim_{r=\infty} \left(\frac{\partial K}{\partial r} - i K \right) \sqrt{r} = 0, \\ \lim_{r=\infty}^{(1)} K \cdot r \neq \infty, & \lim_{r=\infty} \left(\frac{\partial K}{\partial r} - i K \right) r = 0. \end{cases}$$

Wir wenden uns zunächst nur der Behandlung des Potentialproblems (a) zu, wo $K(s^*)$ reell ist, und schieben das Schwingungsproblem (b) auf § 6 zurück.

§ 2. Asymptotische Lösung der Integralgleichung für die Belegungsdichte.

Um die unbekannte Belegungsdichte $\sigma(s^*)$ aus der linearen Integralgleichung (1) erster Art mit dem reellen in s, s^* symmetrischen Kern $K(s, s^*)$

$$(1') \quad 0 = f_1(s) + \int^{(1)} K(s, s^*) \sigma(s^*) ds^*$$

zu bestimmen²⁾, bilden wir die „iterierten Kerne“

1) A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 1912, p. 332.

2) Die notwendige und hinreichende Bedingung der Lösbarkeit von (1') nach Picard (Rendiconti di Palermo 29. p. 29—97. 1910) die Kon-

§ 3. Zweite Darstellung der Näherungsmethode; die Güte der Approximationen.

Die ursprüngliche Integralgleichung (1') für $\sigma(s^*)$

$$(9) \quad f_1(s) + \int K(s s^*) \sigma(s^*) ds^* = 0$$

lösen wir in *erster Näherung* durch $-l_1 f_1(s)$, wenn wir $-l_1$ statt a_1 schreiben und $f_1(s)$ statt $k_0(s)$ einsetzen (3). Die rechte Seite der Integralgleichung ist dann statt Null gleich $f_2(s)$:

$$(9') \quad f_1(s) - l_1 \int K(s s^*) f_1(s^*) ds^* = f_2(s), \quad \text{d. h.}$$

$$(9'') \quad k_0(s) - l_1 k_1(s) = f_2(s).$$

Für diese erste Näherung kann dann l_1 nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrats $\int |f_2(s)|^2 ds = \text{Min.}$ bestimmt und $l_1^{(1)}$ genannt werden.

Um die *zweite Näherung* zu erhalten, setzen wir (5')

$$\sigma(s^*) = -l_1 f_1(s^*) + R_1(s^*)$$

in (9) ein und erhalten wegen (9') für $R_1(s^*)$ die Gleichung

$$(10) \quad f_2(s) + \int K(s s^*) R_1(s^*) ds^* = 0.$$

Diese hat aber genau die gleiche Form wie die ursprüngliche (9), da in ihr R_1 statt σ als Unbekannte auftritt, während $f_2(s)$ den jetzt als bekannt anzusehenden Wert (9') hat. Die Lösung von (10) kann daher durch die entsprechende Funktion $-l_2 f_2(s)$ versucht werden. Die rechte Seite von (10) ist dann statt Null gleich $f_3(s)$:

$$(10') \quad f_2(s) - l_2 \int K(s s^*) f_2(s^*) ds^* = f_3(s), \quad \text{d. h.}$$

$$[k_0(s) - l_1 k_1(s)] - l_2 [k_1(s) - l_1 k_2(s)] = f_3(s),$$

$$(10'') \quad k_0(s) - (l_1 + l_2) k_1(s) + l_1 l_2 k_2(s) = f_3(s).$$

Für diese zweite Näherung können l_1 und l_2 nach dem Prinzip $\int |f_3(s)|^2 ds = \text{Min.}$ bestimmt und der Größe nach $l_1^{(1)}$ und $l_2^{(2)}$ genannt werden.

Um die *dritte Näherung* zu gewinnen, setzt man

$$R_1(s^*) = -l_2 f_2(s^*) + R_2(s^*)$$

in (10) ein und erhält wegen (10') für $R_2(s^*)$ die Gleichung

$$(11) \quad f_3(s^*) + \int \overset{(1)}{K}(s s^*) R_2(s^*) ds^* = 0,$$

deren Lösung auf entsprechende Weise zu erhalten ist.

So gelangt man sukzessive zu den mit (6) übereinstimmenden

Integralgleichungen: mit den Lösungsansätzen:

$$(12) \quad \begin{cases} f_1(s) + \int \overset{(1)}{K}(s s^*) \sigma(s^*) ds^* = 0 & \sigma(s) = -l_1 f_1(s) + R_1(s), \\ f_2(s) + \int \overset{(1)}{K}(s s^*) R_1(s^*) ds^* = 0 & R_1(s) = -l_2 f_2(s) + R_2(s), \\ f_3(s) + \int \overset{(1)}{K}(s s^*) R_2(s^*) ds^* = 0 & R_2(s) = -l_3 f_3(s) + R_3(s), \\ \dots \end{cases}$$

in welchen die Funktionen:

$$(13) \quad \begin{cases} f_1(s) & = k_0(s) \\ f_2(s) = f_1(s) - l_1 \int \overset{(1)}{K}(s s^*) f_1(s^*) ds^* & = k_0(s) - l_1^{(1)} k_1(s), \\ f_3(s) = f_2(s) - l_2 \int \overset{(1)}{K}(s s^*) f_2(s^*) ds^* & = k_0(s) - l_1^{(2)} k_1(s) + l_2^{(2)} k_2(s), \\ \dots \end{cases}$$

auftreten. $f_{m+1}(s)$ enthält als Koeffizienten der $k_1(s)$ bis $k_m(s)$ die elementaren symmetrischen Funktionen der $l_1^{(m)}$ bis $l_m^{(m)}$. Der Vergleich von (13) mit (7) ergibt daher die Beziehungen:

$$(14) \quad \begin{cases} a_1 = -l_1^{(1)}, \\ a_1 = -(l_1^{(2)} + l_2^{(2)}), & a_2 = l_1^{(2)} l_2^{(2)}, \\ a_1 = -(l_1^{(3)} + l_2^{(3)} + l_3^{(3)}), & a_2 = l_1^{(3)} l_2^{(3)} + l_1^{(3)} l_3^{(3)} + l_2^{(3)} l_3^{(3)}, & a_3 = -l_1^{(3)} l_2^{(3)} l_3^{(3)}, \\ \dots \end{cases}$$

Ein Maß für die Güte der Näherungsmethode ist die Kleinheit der Quotienten:

$$(15) \quad \frac{\int |f_{m+1}(s)|^2 ds}{\int |f_m(s)|^2 ds} = \frac{\int [f_m(s) - l_m \int \overset{(1)}{K}(s s^*) f_m(s^*) ds^*]^2 ds}{\int |f_m(s)|^2 ds},$$

besonders also die Genauigkeit, mit der die Beziehung

$$(15') \quad f_m(s) - l_m \int^{(1)} K(s s^*) f_m(s^*) ds \sim 0$$

für alle Randpunkte s erfüllt ist. Letztere Beziehung würde bei beliebiger Gestalt der Funktion $f_m(s)$ dann zu einer in s identischen Gleichung werden, wenn $K(s s^*)$ von der Beschaffenheit wäre, daß im $\lim s = 0$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(s s^*) \left\{ \begin{array}{l} = \pm \infty \text{ für } s = s^*, \\ = 0 \text{ für } s^* - \varepsilon < s < s^* + \varepsilon, \end{array} \right. \\ \int_{s^* - \varepsilon}^{s^* + \varepsilon} K(s s^*) ds = M \quad (M \neq \pm \infty, \quad M \neq 0) \end{array} \right.$$

gilt. l_m wäre dann gleich $\pm 1/M$ zu wählen. In Wirklichkeit ist nun zwar der Kern $K(s s^*) = u_0(r, s^*)$ [vgl. (a')(b')] für $s = s^*$ unendlich groß, besitzt aber auch für $s \neq s^*$ von Null verschiedene Werte. Die Güte der Approximationen hängt also zunächst von dem Maße ab, in welchem $K(s s^*)$ den Bedingungen (16) ähnlich ist, d. h. von der *Steilheit des Anstiegs* in der Umgebung der Unendlichkeitsstelle $s = s^*$.

Die Beziehung (15') würde aber auch dann zu einer in s identischen Gleichung werden, wenn $f_m(s)$ in eine Eigenfunktion des Kerns K übergeht; l_m hätte man dann gleich dem zugehörigen Eigenwerte λ_m zu wählen. Die Anpassung von $f_m(s)$ an eine solche Eigenfunktion ist aber dadurch ermöglicht, daß $f_m(s)$ nach (13) noch die $m - 1$ Konstanten l_1, l_2, \dots, l_{m-1} enthält, und wird automatisch durch das oben angewendete Verfahren des kleinsten Fehlers $\int |f_{m+1}(s)|^2 ds = \text{Min.}$ geleistet.

Für physikalische Zwecke würde es genügen, daß die Funktion $\sigma_m(s^*)$, in die Integralgleichung (1) eingesetzt, dieselbe bis auf einen kleinen, aber endlichen Rest $f_{m+1}(s)$ erfüllt, ohne daß man dabei den Index m allzu groß zu wählen hätte.

Für den Fall eines *reellen* Kerns $K(s s^*) = u_0(r, s^*)$, d. h. bei der Potentialgleichung (a), kann überdies die *Konvergenz* unseres

Annäherungsverfahren gezeigt werden. Die wesentliche Voraussetzung des in § 4 zu gebenden Konvergenzbeweises ist die Entwickelbarkeit der Funktion $f_1(s) = U_1(s)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ des Kerns auf dem Rande s . Bei dem komplexen Kern der Schwingungsgleichung (b) ist andererseits die Approximation dann gut, wenn die Steilheit des Anstiegs von $u_0(r_{ss^*})$ bei $s = s^*$ groß ist; das ist der Fall, wenn das Ausmaß des Randes s viele Wellenlängen beträgt. In diesem Fall kommt bereits die erste Näherung (σ_1 statt σ) der exakten Lösung so nahe wie die von Kirchhoff gegebene Lösung des Beugungsproblems (§ 7), welche ja unter derselben Bedingung kurzer Wellen anzuwenden ist.

§ 4. Beweis der Konvergenz für die Potentialgleichung.

Die reelle in s, s^* symmetrische Funktion $\overset{(1)}{K}(ss^*)$ hat als Kern der homogenen Integralgleichung zweiter Art

$$(17) \quad \varphi(s) = \lambda \int \overset{(1)}{K}(ss^*) \varphi(s^*) ds^*$$

bei endlicher Ausdehnung des Randes die unendlich vielen Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ und zugehörigen Eigenwerte λ_n als Lösungen. Für die $\varphi_n(s)$ gelten die Beziehungen:

$$(17') \quad \int \varphi_n(s) \varphi_m(s) ds \begin{cases} = 0 & (m \neq n), \\ = 1 & (m = n). \end{cases}$$

Die Eigenwerte λ_n setzen wir sämtlich als positiv (oder sämtlich als negativ) voraus — eine Annahme, die bei dem Kern $u_0(r_{ss^*})$ der Gleichung (a') erfüllt ist — und ordnen sie der Größe nach:

$$(17'') \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

Die iterierten Kerne $(2) \overset{(p)}{K}(ss^*)$ besitzen bekanntlich die gleichen Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ wie $\overset{(1)}{K}(ss^*)$, aber die Potenzen λ_n^p zu Eigenwerten. Entwickeln wir also $f_1(s)$ nach den Eigenfunktionen in die absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(18) \quad \begin{cases} f_1(s) = k_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(s) & \text{mit} \\ d_n = \int k_0(s) \varphi_n(s) ds, \end{cases}$$

so wird allgemein nach (3):

$$(18') \quad k_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(s) \frac{1}{\lambda_n^q}$$

und für die Konstanten g_q in den linearen Gleichungen (4) erhält man

$$(19) \quad g_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^2}{\lambda_k^q}.$$

Aus den Eigenwerten λ_n bauen wir jetzt eine Reihe von Konstanten $\alpha^{(m)}$ auf mit Hilfe der zu (14) analogen Beziehungen:

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = -\lambda_1, \\ \alpha_1^{(2)} = -(\lambda_1 + \lambda_2), & \alpha_2^{(2)} = \lambda_1 \lambda_2, \\ \alpha_1^{(3)} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), & \alpha_2^{(3)} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, & \alpha_3^{(3)} = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

und definieren mit ihrer Hilfe eine Reihe von Polynomen:

$$(21) \quad \begin{cases} \pi(\lambda)^{(1)} = 1 + \frac{\alpha_1}{\lambda}, \\ \pi(\lambda)^{(2)} = 1 + \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_2}{\lambda^2}, \\ \dots \\ \pi(\lambda)^{(m)} = 1 + \frac{\alpha_1}{\lambda} + \dots + \frac{\alpha_m}{\lambda^m}. \end{cases}$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$(21') \quad \pi(\lambda)^{(m)} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)$$

und ersieht daraus, daß wegen (17'')

$$(22) \quad \pi(\lambda_p)^{(m)} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m),$$

$$(22') \quad 0 < \pi(\lambda_q)^{(m)} < 1 \quad (q = m+1, m+2, \dots).$$

Jetzt führen wir eine Folge von Funktionen $f(s)$ ein durch die zu (6') analogen Definitionen:

$$(23) \quad f_{m+1}(s) = k_0(s) + \alpha_1^{(m)} k_1(s) + \alpha_2^{(m)} k_2(s) + \dots + \alpha_m^{(m)} k_m(s).$$

Mit Hilfe von (18') und (21) kann man dafür schreiben:

$$(23) \quad \hat{f}_{m+1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(s) \cdot \pi^{(m)}(\lambda_n)$$

oder wegen (22):

$$(23'') \quad \hat{f}_{m+1}(s) = \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n \varphi_n(s) \cdot \pi^{(m)}(\lambda_n).$$

Wegen (22') wird dann

$$|\hat{f}_{m+1}(s)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |d_n \varphi_n(s)|.$$

Infolge der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (18) wird die Summe rechts, falls nur m hinreichend groß genommen wird, kleiner als eine beliebig kleine Größe ε . Damit ist bewiesen, daß $\hat{f}_{m+1}(s)$ mit wachsendem m absolut und gleichmäßig gegen Null konvergiert:

$$(24) \quad |\hat{f}_{m+1}(s)| < \varepsilon.$$

Die in (23) definierten $\hat{f}_{m+1}(s)$ unterscheiden sich aber von den in § 2 benutzten Näherungsfunktionen $f_{m+1}(s)$ nur durch die Koeffizienten $\alpha_p^{(m)}$ an Stelle der $\alpha_p^{(m)}$, welche dort durch die Minimalbedingung (7'') bestimmt wurden, während hier die $\alpha_p^{(m)}$ durch (20) definierbar waren. Es ist also von den beiden Integralen

$$I_m = \int |f_{m+1}(s)|^2 ds = \text{Min.},$$

$$J_m = \int |\hat{f}_{m+1}(s)|^2 ds$$

das erste kleiner oder höchstens gleich dem zweiten; und da nach (24) J_m beliebig klein wird, gilt dasselbe erst recht von I_m . Es wird also

$$(25) \quad I_m = \int |f_{m+1}(s)|^2 ds < \eta,$$

falls m hinreichend groß genommen wird, womit die Konvergenz unserer Näherungsmethode für die Potentialgleichung (reelles

⁽¹⁾
K) bewiesen ist.

Anmerkung 1. Während die $\hat{f}_{m+1}(s)$ gleichmäßig der Null zustreben, kann dasselbe von den $f_{m+1}(s)$ nicht behauptet

werden. Definiert man analog zu (21) eine Folge von Polynomen $P^{(m)}(\lambda)$, indem man in (21) die $\alpha_p^{(m)}$ durch die $a_p^{(m)}$ (14) ersetzt, also statt (21')

$$(26) \quad P^{(m)}(\lambda) = \left(1 - \frac{l_1^{(m)}}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{l_2^{(m)}}{\lambda}\right) \dots \left(1 - \frac{l_m^{(m)}}{\lambda}\right),$$

so wird analog zu (23')

$$(26') \quad f_{m+1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n q_n^{(s)} P^{(m)}(\lambda_n)$$

und aus (25) folgt dann bei genügend großem m :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [d_n P^{(m)}(\lambda_n)]^2 < \eta.$$

Es können also die Faktoren $d_n P^{(m)}(\lambda_n)$ von $q_n(s)$ in der Summe $f_{m+1}(s)$ (26') beliebig klein gemacht werden, jedoch folgt daraus *nicht*, daß auch $f_{m+1}(s)$ selbst für jedes s gleichmäßig verkleinert werden kann, obwohl bei nicht zu ausgefallenen physikalischen Randwertproblemen wohl stets neben der gleichmäßigen Konvergenz von $f_{m+1}(s)$ auch die von $f_{m+1}(s)$ gegen Null bestehen wird.

Anmerkung 2. Die Koeffizienten $\alpha_p^{(m)}$ streben wegen (20) mit wachsendem m unendlichen Beträgen zu. Daher wird die Reihe (23) für $f_{m+1}(s)$ im $\lim m = \infty$ sinnlos. Mit Benutzung von (20) kann man aber so umordnen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{m+1}(s) &= k_0 - \lambda_1 k_1 - \lambda_2 (k_1 + \alpha_1^{(1)} k_2) - \dots \\ &\quad - \lambda_m (k_1 + \alpha_1^{(m-1)} k_2 + \dots + \alpha_{m-1}^{(m-1)} k_m), \end{aligned} \right.$$

woraus $f_{m+2}(s)$ durch einfache Hinzufügung des Reihengliedes

$$(27') \quad -\lambda_{m+1} (k_1 + \alpha_1^{(m)} k_2 + \dots + \alpha_m^{(m)} k_{m+1})$$

hervorgeht. Dadurch hat man die konvergente Reihe

$$(28) \quad f_{\infty}(s) = k_0 - \lambda_1 k_1 - \lambda_2 (k_1 + \alpha_1^{(1)} k_2) - \lambda_3 (k_1 + \alpha_1^{(2)} k_2 + \alpha_2^{(2)} k_3) - \dots$$

erhalten, welche gleichmäßig für jedes s den Wert Null darstellt.

§ 5. Ein anderes Näherungsprinzip.

Vergleich mit der Methode von W. Ritz.

Die obige Näherungsmethode zur Lösung von

$$(1') \quad k_0(s) + \int K(s s^*) \sigma(s^*) ds^* = 0$$

läßt sich kurz so zusammenfassen:

Gesucht ist eine Funktion $\sigma_m(s)$, welche das Variationsproblem

$$(7') \quad \int [k_0(s) + \int K(s s^*) \sigma_m(s^*) ds^*]^2 ds = \text{Min.}$$

erfüllt und aus m Funktionen $k_0(s)$, $k_2(s)$, ... $k_{m-1}(s)$ besteht:

$$(5') \quad \sigma_m(s) = \sum_{p=1}^m a_p k_{p-1}(s).$$

Das Minimalproblem (7') hat als „äquivalente Lagrangesche Gleichung“ die Integralgleichung:

$$k_1(s) + \int K(s s^*) \sigma(s^*) ds^* = 0,$$

welche aus (1') durch Iteration, d. h. durch Multiplikation mit $K(s s^*) ds$ und Integration nach ds , hervorgeht. Mit Benutzung der Abkürzungen:

$$(4) \quad \int k_{p'}(s) k_{p''}(s) ds = g_{p'+p''}$$

geht (7') über in die Minimalaufgabe:

$$\int k_0(s)^2 ds + 2 \sum_{p=1}^m a_p g_p + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m a_p a_q g_{p+q} = \text{Min.},$$

deren lösendes Wertsystem $a_1^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}$ aus den m Gleichungen:

$$(7'') \quad g_p + \sum_{q=1}^m a_q g_{p+q} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

zu entnehmen ist. Die Reste $f_{m+1}(s)$ der angenäherten Lösung von (1') erfüllen dabei die Orthogonalitätsrelationen:

$$\int f_{m+1} k_p(s) ds = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m).$$

Man könnte aber mit demselben Recht $\sigma_m(s)$ aus dem zu (1') als „Lagrangesche Gleichung“ äquivalenten Variationsproblem:

$$(29) \quad 2 \int k_0(s) \sigma_m(s) ds + \iint K(s s^*) \sigma_m(s) \sigma_m(s^*) ds ds^* = \text{Min.}$$

bestimmen, welches durch (4) übergeht in:

$$2 \sum_{p=1}^m a_p g_{p-1} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m a_p a_q g_{p+q-1} = \text{Min.}$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$(29') \quad g_{p-1} + \sum_{q=1}^m a_q g_{p+q-1} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

für die $a_1^{(m)} a_2^{(m)} \dots a_m^{(m)}$. In diesem Fall erfüllen die Restfunktionen $f_{m+1}^{(m)}(s)$ die Orthogonalitätsrelationen:

$$\int f_{m+1}^{(m)}(s) h_{p-1}(s) ds = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m),$$

aus welchen wegen der Entwicklung (6') folgt:

$$\int f_{m+1}^{(m)}(s) f_p(s) ds = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m),$$

so daß jetzt sämtliche Restfunktionen $f_1(s), f_2(s), \dots$ aufeinander orthogonal sind.

Damit vergleichen wir eine Methode zur Lösung der Integralgleichung 2. Art:

$$(30) \quad f(s) + \lambda \int K(s s^*) \sigma(s^*) ds^* - \sigma(s) = 0,$$

welche W. Ritz gegeben hat.¹⁾ Ritz nimmt m Funktionen $r_1(s), \dots, r_m(s)$, welche den Bedingungen:

$$(30') \quad \int r_p(s) r_q(s) ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

genügen, und führt den Ansatz:

$$(30'') \quad \sigma_m(s) = \sum_{p=1}^m a_p r_p(s)$$

in das zu (30) äquivalente Variationsproblem:

$$(31) \quad 2 \int f(s) \sigma(s) ds + \lambda \iint K(s s^*) \sigma(s) \sigma(s^*) ds ds^* - \int \sigma(s)^2 ds = \text{Min.}$$

ein, welches durch die Abkürzungen:

$$g_{pq} = \iint K(s s^*) r_p(s) r_q(s^*) ds ds^*, \quad f_p = \int f(s) r_p(s) ds$$

1) W. Ritz, Gesammelte Werke p. 197 u. 251, Paris 1911; Journal für reine u. angew. Math. 135. Heft 1. 1908.

übergeht in:

$$2 \sum_{p=1}^m a_p f_p + \lambda \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m a_p a_q g_{pq} - \sum_{p=1}^m a_p^2 = \text{Min.}$$

Das zugehörige Wertsystem $a_1 \dots a_m$ ^(m) bestimmt sich dann durch die m linearen Gleichungen:

$$(31') \quad f_p + \lambda \sum_{q=1}^m a_q g_{qp} - a_p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m).$$

Beiden Methoden gemeinsam ist, daß die Konstanten $g_{p' + p''}$, bzw. g_{pq} und f_p der linearen Bestimmungsgleichungen (7''), (29'), (31'') durch einfache Integrationen (Quadraturen) gegebener Funktionen herzustellen sind. Der Unterschied liegt jedoch darin, daß die Ritzschen Entwicklungsfunktionen $r_p(s)$ (30'') zueinander orthogonal sind (30'), im übrigen aber, mit gewissen Einschränkungen, beliebig gewählt werden können; dagegen waren unsere Entwicklungsfunktionen $k_p(s)$ von vornherein durch (3) bestimmt, aber nicht zueinander orthogonal. Ritz wählt die $r_p(s)$, geleitet durch geometrisch-physikalische Erwägungen, dem betreffenden Spezialproblem angepaßt in der Art, daß die Heranziehung nur *weniger* $r_p(s)$ zur angenäherten Lösung des betreffenden Problems ausreicht. Bei unserer Methode wird letztere Forderung *automatisch* erfüllt. Im Fall eines optischen Beugungsproblems führt bereits der eingliedrige Ansatz $\sigma(s) = a_1 k_0(s)$ ⁽¹⁾ zu einer Näherung, welche der Kirchhoffschen Beugungsnäherung entspricht (vgl. § 7).

§ 6. Die Schwingungsgleichung.

Der Konvergenzbeweis des § 4, der die Entwicklung von $f_1(s)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ des Kerns $K(s, s^*)$ ⁽¹⁾ mit den reellen Eigenwerten λ_n voraussetzte, versagt bei den komplexen Einheitsquellen (b') der Schwingungsgleichung $\Delta U + U = 0$. Nur in einem besonderen Fall läßt sich auch das Randwertproblem der Schwingungsgleichung leicht auf *reelle* influenzierte Randquellen zurückführen, nämlich bei der Beugung an einer *Kugel* bzw. am *Kreiszyylinder*. Bedeutet \bar{z} nämlich die zu z konjugiert komplexe Größe, so multipliziert man die zu lösende Integralgleichung (1) mit $K(s', s)$ ⁽¹⁾ und integriere nach ds .

Mit Einführung von:

$$(32) F_1(s') = \int f_1(s) \overline{K(s s')} ds, \quad \overline{K(s' s^*)} = \int \overline{K(s' s)} \cdot \overline{K(s s^*)} ds$$

geht dann (1) über in:

$$(32') \quad 0 = F_1(s') + \int \overline{K(s' s^*)} \sigma(s^*) ds^*$$

als Bestimmungsgleichung für $\sigma(s^*)$.

Bei der Kugel und beim Kreiszylinder gibt es aber zu jedem Punkt s' einen zugehörigen Punkt s'' derart, daß:

$$K(s s') = \overline{K(s^* s'')} \quad \text{und} \quad K(s s'') = \overline{K(s^* s')}, \quad |ds'| = |ds''|.$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} \overline{K(s s')} K(s' s^*) &= \overline{K(s^* s'')} K(s'' s), \\ \int \overline{K(s s')} K(s' s^*) ds' &= \int \overline{K(s^* s'')} K(s'' s) ds'', \\ \overline{K(s s^*)} &= \overline{K(s^* s)}, \end{aligned}$$

also ist $\overline{K(s s^*)}$ symmetrisch in s, s^* . Nach (32) wird dann $K(s s^*) = \overline{K(s s^*)}$, d. h. es ist $\overline{K(s s^*)}$ ein reeller Kern. Da $F_1(s)$ in (32) im allgemeinen komplex ist, hat man auch $\sigma(s^*)$ als komplexe Funktion anzusetzen, so daß (32') in zwei reelle unabhängige Integralgleichungen für den reellen und für den imaginären Teil von $\sigma(s^*)$ zerfällt. Bestimmt man diese beiden Teile für sich nach der Methode des § 2, so gilt nach § 4 die Konvergenz der vorkommenden Reihen.

Bei anders gestalteten Randflächen bleibt $\overline{K(s s^*)}$ unsymmetrisch und komplex, mit den Methoden des § 4 läßt sich also die Konvergenz der Folge:

$$I_m = \int |f_{m+1}(s)|^2 ds \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

gegen Null nicht beweisen. Dagegen bleibt auch für den komplexen Kern $\overline{K(s s^*)}$ der Schwingungsgleichung die Darstellung

des § 3 mit der dortigen Abschätzung über die Güte der Approximationen bestehen, nur sind alle dort vorkommenden

Konstanten $l_p^{(m)}$ ebenso wie die Funktionen $f_m(s)$, $R_m(s)$ usw. komplex. Zur Bestimmung der Koeffizienten $a_1^{(m)} \dots a_m^{(m)}$ der Reihe

$f_{m+1}(s)$ hat man jetzt das Minimalproblem:

$$I_m = \int |f_{m+1}(s)|^2 ds = \int f_{m+1}(s) \overline{f_{m+1}(s)} ds = \text{Min.}$$

zugrunde zu legen, welches zu den m Gleichungen:

$$\int f_{m+1}(s) \overline{k_p s} ds = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

führt, d. h. zu dem System (vgl. 7''):

$$(33) \int k_0 \bar{k}_p + a_1 \int k_1 \bar{k}_p + \dots + a_m \int k_m \bar{k}_p ds \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

mit dem komplexen Lösungssystem $a_1^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}$. Mit deren Hilfe ist jetzt die komplexe Näherung für $\sigma(s^*)$:

$$\sigma_m(s^*) = a_1^{(m)} k_0(s) + a_2^{(m)} k_1(s) + \dots + a_m^{(m)} k_{m-1}(s)$$

aufzubauen, ohne daß hier die Konvergenz der Reste:

$$\int |f_{m+1}(s)|^2 ds$$

gegen Null mit wachsendem m bewiesen werden kann.

§ 7. Vergleich mit der Kirchhoffschen Näherung.

Unsere erste Näherung für die Lösung $U(P)$ des Beugungsproblems ist nahe verwandt mit der Kirchhoffschen Näherung $U_K(P)$:

$$U_K(P) = \frac{1}{4\pi} \int_l \left[f_1(l) \frac{\partial \bar{K}(r_{lP})}{\partial n} - \bar{K}(r_{lP}) \frac{\partial f_1(l)}{\partial n} \right] dl,$$

in welcher die Integration nicht über den Schirm s , sondern über die Lücken l erstreckt wird. Führt man nämlich in letzterer Gleichung das Integral über die Lücken *und* über den Schirm aus und zieht dafür das Integral über den Schirm allein wieder ab, also:

$$U_K(P) = \int_{l,s} [\] - \int_s [\],$$

so ist nach dem Greenschen Satze das erste Integral gleich $f_1(P)$, so daß die Kirchhoffsche Näherung übergeht in:

$$(34) U_K(P) = f_1(P) - \frac{1}{4\pi} \int_s \left[f_1(s) \frac{\partial \bar{K}(r_{sP})}{\partial n} - \bar{K}(r_{sP}) \frac{\partial f_1(s)}{\partial n} \right] ds,$$

zusammengesetzt aus der ungestörten Erregung $f_1(P)$ und einem über den Schirm s erstreckten Integral.

Damit vergleichen wir unsere nach § 2 gewonnene erste Näherung mit $\sigma_1(s^*) = a_1 f_1^{(1)}(s^*)$ statt $\sigma(s^*)$. Sie heißt nach (1):

$$(35) \quad U(P) = f_1(P) + a_1 \int_s^{(1)} f_1(s) K(r_{sP}) ds.$$

Bei Kirchhoff tritt also die ungestörte Erregung f_1 als Doppelbelegung und $\partial f_1 / \partial n$ als einfache Belegung auf dem Schirm auf, bei uns nur f_1 als einfache Belegung.

Die Brauchbarkeit unserer Näherungsmethode soll im folgenden an einem Potential- (Influenz-) Problem und an einem Schwingungs- (Beugungs-) Problem rechnerisch verfolgt werden.

Anhang.

1. Beispiel eines Influenzproblems.

Ein grades unendlich glattes Band (Streifen), dessen Erzeugende parallel der z -Achse läuft, schneide die xy -Ebene in der graden Spur s , welche auf der x -Achse von -2 bis $+2$ läuft. Das Band befinde sich in einem homogenen Potentialfeld, dessen ungestörtes Potential f_1 längs s linear ansteigt von dem Wert $U(-2) = -2$ auf $U(+2) = 2$. Dann ist:

$$(36) \quad f_1(s) = s, \quad K^{(1)}(s, s^*) = \ln \frac{1}{|s - s^*|}, \quad -2 \leq s \leq +2$$

und die zu lösende Integralgleichung heißt bei der Randbedingung $U(s) = 0$:

$$s + \int_{-2}^{+2} \ln \frac{1}{|s - s^*|} \sigma(s^*) ds^* = 0.$$

Ihre strenge Lösung ist:

$$(37) \quad \sigma_\infty(s) = \frac{1}{\pi} \frac{-s}{\sqrt{(2+s)(2-s)}},$$

wie auf anderem Wege abgeleitet werden kann. Unsere Näherungsmethode gibt die Reihe:

$$\sigma_m(s) ds = \sum_{p=1}^m a_p^{(m)} k_{p-1}(s) ds,$$

deren Koeffizienten $a_p^{(m)}$ aus (7'') zu berechnen sind. Dazu müssen außer den Funktionen $k_0(s)$, $k_1(s)$, ... auch die Kon-

stanten $g_1, g_2 \dots$ hergestellt werden. Die numerische Rechnung gibt folgende Werte (für negative s sind die Vorzeichen umzukehren):

s	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$k_0(s)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$k_1(s)$	0	0,797	1,578	2,327	3,024	3,649	4,171	4,569	4,784	4,719	4,0
$k_2(s)$	0	2,70	5,48	7,93	10,20	12,04	13,40	14,31	14,40	13,70	11,34

$$g_1 = 16, \quad g_2 = 49,2, \quad g_3 = 153,5, \quad g = 482,$$

$$\begin{cases} a_1^{(1)} = -0,325, \\ a_1^{(2)} = -1,16, \end{cases} \quad a_2 = 0,267, \quad \text{also:} \quad \begin{cases} l_1^{(1)} = 0,325, \\ l_1^{(2)} = 0,315, \end{cases} \quad l_2^{(2)} = 0,845,$$

$$\begin{cases} f_1'(s) = k_0(s), \\ f_2'(s) = k_0(s) - 0,325 k_1(s), \\ f_3'(s) = k_0(s) - 1,16 k_1(s) + 0,267 k_2(s), \\ \sigma_1(s) = -0,325 k_0(s), \\ \sigma_2(s) = -1,16 k_0(s) + 0,267 k_1(s). \end{cases}$$

s	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f_1(s)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f_2(s)$	0	-0,052	-0,096	-0,156	-0,183	-0,185
$f_3(s)$	0	-0,004	0,034	0,018	0,014	-0,018
$-\sigma_1(s)$	0	0,065	0,130	0,195	0,260	0,325
$-\sigma_2(s)$	0	0,019	0,043	0,075	0,121	0,186
$-\sigma_\infty(s)$	0	0,032	0,065	0,100	0,139	0,184

s	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f_1(s)$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f_2(s)$	-0,156	-0,085	0,045	0,267	0,700
$f_3(s)$	-0,062	-0,080	-0,103	-0,012	0,386
$-\sigma_1(s)$	0,390	0,455	0,520	0,585	0,650
$-\sigma_2(s)$	0,278	0,404	0,579	0,828	1,252
$-\sigma_\infty(s)$	0,242	0,311	0,424	0,655	∞

σ_∞ in der letzten Zeile gibt die Werte der theoretischen Lösung (37) wieder. Der Verlauf von $f_1, f_2, f_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ist aus folgender Fig. 1 ersichtlich. Die Funktionenfolge $f_1(s), f_2(s), \dots$ konvergiert offenbar, trotz der scharfen Kante bei $s = \pm 2$,

gleichmäßig gegen den Wert $f_\infty(s) \equiv 0$, die Grenzbedingung wird also mit wachsender Zahl der zur Näherung herangezogenen Funktionen $k_p(s)$ überall gleichmäßig angenähert. Die dazu erforderlichen Belegungsdichten $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$, ... konvergieren dagegen nur mit Ausschluß der scharfen Kanten gegen die

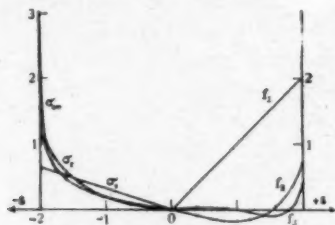


Fig. 1.

theoretische Dichte $\sigma_\infty(s)$. Für die Güte der m -ten Näherung ist aber nicht die Approximation von $\sigma_m(s)$ gegen $\sigma_\infty(s)$, sondern die von:

$$I_m : I_0 = \int f_{m+1}(s)^2 ds : \int f_1(s)^2 ds$$

gegen den Wert Null maßgebend. Für diese Fehlerquadrate erhält man numerisch:

$$I_0 = 5,333, \quad I_1 = 0,157, \quad I_2 = 0,028, \dots$$

Besonders zu beachten ist, daß die angegebenen numerischen Werte wesentlich auf den drei Annahmen (36) beruhen. Würde das Band etwa die p -fache Breite haben, so kann man die Koordinate $\tau = s/p$ einführen, welche (36) in die Form:

$$f_1 = p \tau, \quad k = \ln \frac{1}{p|\tau - r^*|}, \quad -2 < \tau < +2$$

überführt und wegen $ds = p d\tau$ zu der Integralgleichung:

$$\tau + \int_{-2}^{+2} \ln \frac{1}{p|\tau - r^*|} \sigma(r) d\tau = 0$$

als Bestimmungsgleichung für $\sigma(\tau)$ führt.

2. Beispiel eines Beugungsproblems.

Als Schwingungsproblem behandeln wir die Beugung einer ebenen, homogenen Welle der Wellenlänge 2π , welche nach der y -Richtung fortschreitet, an einem unendlich glatten graden

Band, dessen Erzeugende parallel der z -Richtung läuft. Die Spur des Bandes in der xy -Ebene sei das Stück der x -Achse $-25 < x < +25$, welches also nur $50 : 2\pi \sim 8$ Wellenlängen breit ist. Wir haben hier bis auf den Faktor $e^{i\tau t}$:

(38) $f_1(s) = 1$, $\overset{(1)}{K}(s, s^*) = H(|s - s^*|)$, $-25 < s < +25$,
worin $H = \tau + iN$ die aus der nullten Besselschen Funktion J und Neumannschen Funktion N aufgebaute komplexe Hankelsche Zylinderfunktion ist. Bei der Randbedingung $U(s) \equiv 0$ bestimmt sich die komplexe Belegung $\sigma(s^*)$ aus:

$$1 + \int H(|s - s^*|) \sigma(s^*) ds^* = 0$$

mit der ersten Näherungslösung $\sigma_1(s) = \overset{(1)}{a}_1 k_0(s)$ und dem zugehörigen Fehler:

$$f_2(s) = k_0(s) + \overset{(1)}{a}_1 k_1(s).$$

Zerlegt man allgemein die komplexe Größe z in $z^{(r)} + iz^{(i)}$, so wird hier:

$$\begin{aligned} f_2(s) &= f_2^{(r)} + if_2^{(i)} \\ &= [1 + \overset{(r)}{a}_1 k_1^{(r)} - \overset{(i)}{a}_1 k_1^{(i)}] + i[\overset{(r)}{a}_1 k_1^{(i)} + \overset{(i)}{a}_1 k_1^{(r)}]. \end{aligned}$$

$\overset{(i)}{a}_1$ ist zu bestimmen aus (33):

$$\int \bar{k}_0 \bar{k}_1 ds + \overset{(i)}{a}_1 \int \bar{k}_1 \bar{k}_1 ds = 0.$$

Darin ist:

$$\bar{k}_0^{(r)}(s) = 1,$$

$$\bar{k}_0^{(i)}(s) = 0,$$

$$\bar{k}_1^{(r)}(s) = \int_{-25}^{25} J(|s - s^*|) ds^*,$$

$$\bar{k}_1^{(i)}(s) = \int_{-25}^{25} N(|s - s^*|) ds^*.$$

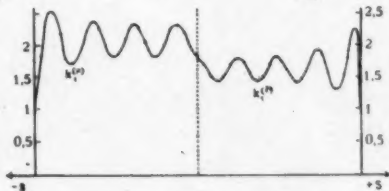


Fig. 2.

Aus dem bekannten und tabulierten Verlauf von J und N erhält man die in vorstehender Fig. 2 abgebildeten Funktionen $k_1^{(r)}$ und $k_2^{(i)}$, aus welchen sich numerisch mit:

$$a_1 = -0,301 - i \cdot 0,234$$

die abgebildete Restfunktion (Fig. 3) $f_3(s) = f_2^{(r)} + i f_3^{(i)}$ ergibt.

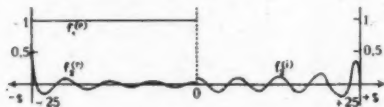


Fig. 3.

Das Fehlerquadrat $J_0 = \int |f_1|^2 ds = 50$ wird auf:

$$J_1 = \int |f_2(s)|^2 ds = 0,818$$

herabgedrückt. Ein noch günstigeres Resultat als dieses Verhältnis 0,818 : 50 würde die erste Näherung geben, wenn das Band *viele* (statt nur 8) Wellenlängen breit genommen wäre.

Da nämlich dann die Funktion $K(s, s^*)^{(1)}$ von dem Wert ∞ bei $s = s^*$ relativ viel schneller auf kleine Beträge herabsinken würde, wären die Bedingungen (16) § 3 für gute Konvergenz viel besser erfüllt. Auch die Kirchhoffsche Beugungstheorie, welche unserer ersten Näherung entspricht, gilt ja nur für Schirme und Öffnungen, welche *viele* Wellenlängen Ausmaß besitzen.

(Eingegangen 4. Juli 1918.)

3. *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern; von W. Schottky.*

Durch Hintereinanderschalten von Glühkathodenverstärkern ist es in den letzten Jahren gelungen, Wechselströme von äußerst geringer Amplitude wahrnehmbar und meßbar zu machen. Viele technische Probleme haben dadurch eine ruckweise Förderung erfahren, aber auch dem Forscher scheint sich ein neues Gebiet zu erschließen; die Verstärkerschaltungen haben für elektrische Untersuchungen sicher dieselbe Bedeutung wie in der Optik das Mikroskop. Da sich bisher noch keine deutliche Grenze für die erreichbare Verstärkung gezeigt hat, konnte man hoffen, durch genügenden Schutz störungsfreie Aufstellung usw. hier sozusagen bis zum unendlich Kleinen vorzudringen; der Traum vom „Gras wachsen hören“ stellte sich wieder einmal recht greifbar der Menschheit dar.

Absicht der folgenden Zeilen ist, gewisse unüberschreitbare Grenzen für die Verstärkung mit Glühkathoden- und Gasentladungsröhren nachzuweisen. Das erste unüberwindliche Hindernis ist merkwürdigerweise durch die Größe des Elementarquantums der Elektrizität gegeben. Die Wärmebewegung der Elektrizität bildet eine weitere Grenze; diese scheint aber in den meisten Fällen höher zu liegen als die andere. Doch schicken wir die Untersuchung dieser Erscheinung als der einfacheren und bekannteren unserer Hauptbetrachtung voraus.

I. Teil. Der Wärmeeffekt.

Wir betrachten einen metallischen Leiter mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität, z. B. eine Drahtspule. Ein solches Gebilde ist bekanntlich verschiedener Eigenschwingungen fähig, d. h. es existieren verschiedene Schwingungsvorgänge, die durch einen Strom J , eine Selbstinduktion L ,

eine Elektrizitätsmenge e und eine Kapazität C charakterisiert sind und bei denen die Teilenergie

$$E = \frac{1}{2} L J^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} e^2$$

von allen übrigen Vorgängen unabhängig ist. Außerdem gilt noch die Beziehung

$$J = \frac{de}{dt}$$

Im Falle eines einfachen elektrischen Schwingungskreises, bestehend aus Selbstinduktion und Kapazität, haben hierbei die Größen J , e , C , L die bekannte einfache Bedeutung; bei komplizierteren Eigenschwingungen bleibt wenigstens eine formale Analogie bestehen.

Sei nun unser elektrisches Gebilde allen Einwirkungen von außen entzogen; alle Eigenschwingungen seien infolge der Widerstandsdämpfung abgeklungen. Es ist dann thermisches Gleichgewicht erreicht; die gesamte vorhandene Wärmeenergie verteilt sich nach bestimmten Gesetzen auf die Teilenergien des Systems. Nach einer Bemerkung von Einstein ist dann offenbar auch die mittlere Energie einer elektrischen Eigenschwingung nicht ganz auf Null herabgesunken, sondern besitzt, falls die Teilenergie die oben angegebene Form hat, und die Eigenschwingung nicht allzu hoch liegt, den Wert kT , wobei k die elementare Gaskonstante, T die absolute Temperatur ist. Dieser Satz besteht ganz unabhängig von jeder Annahme über den Mechanismus der Elektrizitätsbewegung in unserem Gebilde; er würde auch gelten, wenn die Elektrizität eine kontinuierlich verteilte Flüssigkeit wäre.

Wenden wir nun den gefundenen Satz auf den Empfangskreis einer Verstärkeranordnung an, und nehmen wir beispielsweise an, daß der Empfangskreis eine Eigenschwingung im Hörgebiete besitzt, so ergibt sich, daß bei genügender Verstärkung in einem am Ende angelegten Telephon auch bei Ausschaltung aller äußeren Störungen ein dauerndes Summen vorhanden sein müßte, das alle sichereren Signale überdeckt und dadurch ihre Aufnahme unmöglich macht.

Über die Reinheit der infolge der Wärmebewegung auftretenden Schwingungen gibt folgende Überlegung Aufschluß. Eine langsame elektrische Eigenschwingung läßt sich ver-

gleichem mit der Brownschen Bewegung eines durch elastische Kräfte festgehaltenen größeren Partikelchens in einem Gase. Die Gasmoleküle üben auf ein solches Teilchen zweierlei Wirkungen aus: einerseits wird eine vorhandene Bewegung durch eine der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft gedämpft; andererseits aber bewirken die unregelmäßigen Stöße der Gasmoleküle, daß im Mittel dem Partikel ebensoviel Energie zugeführt wird, wie ihm durch Dämpfung verloren geht. Auf diese Weise wird die mittlere Energie kT aufrecht-erhalten. Bei einer elektrischen Schwingung spielt der elek-trische Widerstand die Rolle des Reibungswiderstandes; die unregelmäßigen Stöße der Gasmoleküle werden ersetzt durch die unregelmäßigen Impulse, welche die geladenen Teilchen innerhalb des Leiters infolge ihres Energieaustausches mit dem übrigen System bekommen. Da sich nun die Energie einer Eigenschwingung aus den — unter einem bestimmten Gesichtspunkte gruppierten — Wechselenergien der elek-trischen Elementarteilchen zusammensetzt, wird zugleich mit der Energiezufuhr an diese Elementarteilchen auch die Energie der betrachteten Eigenschwingung erhöht; damit das ther-mische Gleichgewicht erhalten bleibt, muß diese Energie-zufuhr im Mittel ebenso groß sein wie die Energieabnahme der Schwingung infolge der Dämpfung.

Daraus ergibt sich, daß die Dämpfungskonstante direkt das Maß für die Reinheit der durch die Wärmebewegung aufrechterhaltenen Schwingungen bilden muß. Eine ganz ungedämpfte Schwingung müßte dauernd ohne Energiezufuhr fortbestehen, würde also weder in der Phase noch in der Amplitude Schwankungen erleiden; bei einer sehr stark gedämpften Schwingung dagegen geht innerhalb einer Periode ein großer Teil der anfangs vorhandenen Energie verloren. Falls neue Energie zugeführt wird, geschieht dies in ganz unregelmäßiger Weise, so daß schon nach einer Periode Amplitude und Phase der Schwingung völlig gewechselt haben können. Bei hörbaren Frequenzen wird im ersteren Fall im Endtelefon ein vollkommen reiner Ton, im zweiten Falle nur ein unregelmäßiges Geräusch zu hören sein (vorausgesetzt, daß die weiteren Elemente der Verstärkeranordnung die erforderlichen Eigenschaften besitzen, um eine Klangfarbe einiger-maßen getreu wiederzugeben).

Der elektrische Widerstand ist also von großem Einfluß auf die *Art* der Schwingung; nicht die Intensität, wohl aber die Reinheit wird von ihm beeinflusst. Wirbelstrom- und Hysteresisverluste gehen hierbei natürlich ebenso ein wie Ohmscher Widerstand; dementsprechend muß auch eine thermische Anregung der Schwingung durch Induktion und von Seiten eines in der Nähe befindlichen magnetischen Materials existieren, deren Verfolgung vielleicht von Interesse wäre.

Als ein Paradoxon erscheint die Folgerung, daß die Wärmeintensität einer elektrischen Eigenschwingung unabhängig von dem Widerstande ist, in dem Falle, wo der Widerstand unendlich groß ist, wo aus dem Leiter ein Isolator wird. In diesem Falle trifft jedoch eine Voraussetzung des kT -Gesetzes nicht mehr zu: um die elektrischen Teilchen wie in einem Leiter zu verlagern, müssen dann große Abtrennungsarbeiten gegen molekulare Kräfte geleistet werden; die elektrische Energie der Eigenschwingung superponiert sich nicht mehr ungestört den übrigen Energien des Systems, sondern kann nur gleichzeitig mit anderen Energien anwachsen. Damit entfällt die Voraussetzung des kT -Gesetzes. Dasselbe ist der Fall, wenn Eigenschwingungen von so kleinen Abmessungen betrachtet werden, daß nur eine kleine Anzahl von Elementarteilchen dazu einen Beitrag liefern kann; die Bewegung dieser Elementarteilchen ist dann gleichzeitig für verschiedene Eigenschwingungen maßgebend, die Schwingungen sind nicht mehr genügend inkohärent, um sich ungestört zu superponieren. Interessant bei der Verfolgung dieser Gedankengänge ist jedenfalls, daß bei der Abzählung der gesamten Freiheitsgrade eines Systems außer den elastischen Freiheitsgraden von Debye noch eine neue Reihe *elektrischer* Freiheitsgrade betrachtet werden muß; die Gesamtzahl der Freiheitsgrade kann natürlich nur ebenso groß sein wie die Zahl der unabhängigen Teilchenkoordinaten, und bei schlechten Leitern sowie bei den höheren Eigenschwingungen werden elektrische und elastische Freiheitsgrade ineinander übergehen.

Bei allen der Technik zugänglichen Frequenzen sind wir aber von diesem Gebiete weit entfernt. Außer dem elektrischen Widerstande sind also überhaupt keine Materialeigenschaften für die Wärmeschwingungen der Elektrizität maßgebend, und

auch der Widerstand bestimmt nicht die Energie, sondern nur die *Reinheit* der Schwingung.

Die Berechnung der mittleren Wärmeenergie E_w einer elektrischen Eigenschwingung ist demnach sehr einfach. Es ist

$$E_w = kT = 1,35 \cdot 10^{-16} \cdot T \text{ erg,}$$

oder, in technischen Energieeinheiten (Joule) ausgedrückt,

$$E_w = 1,35 \cdot 10^{-23} T$$

technische Energieeinheiten. Für Zimmertemperatur ergibt das ca. $4 \cdot 10^{-21}$ technische Energieeinheiten.

Was dieser Wert als Anfangsenergie in einer Verstärkeranordnung bedeutet, ist noch nicht ohne weiteres ersichtlich. Gegeben ist bei allen Verstärkungsproblemen nicht eine Anfangsenergie, sondern eine Anfangsleistung; genauer: es ist durch die äußeren Bedingungen die Maximalleistung gegeben, die bei geeigneter Anpassung auf die Verstärkeranordnung übertragen werden kann. Wir haben also die Frage so zu stellen: Welches ist die Leistung, die notwendig ist, um im Empfangskreise dauernd eine Energie aufrecht zu erhalten, welche ebenso groß ist wie die Wärmeenergie einer Eigenschwingung? Diese Leistung L_w stellt dann offenbar die Grenze dar für die Anfangsleistungen, deren Verstärkung noch möglich ist, ohne daß die Wärmebewegung das Signal verwischt und übertönt.

Wir beantworten die Frage für einen einfachen Schwingungskreis, bestehend aus Selbstinduktion L und Kapazität C , in dem die Dämpfung durch einen Ohmschen Widerstand R hervorgerufen wird. Die mittlere Energie in einem solchen Schwingungskreise ist gleich $\overline{LJ^2}$, nämlich doppelt so groß wie die mittlere magnetische Energie, welche gleich $\frac{L}{2} J^2$ ist. Die mittlere Leistung dagegen ist gleich $R\overline{J^2}$. Es ist also

$$(1) \quad \overline{LJ^2} = \frac{RJ^2}{L} \cdot E_w = \frac{R}{L} \cdot E_w.$$

Wird die „Abklingzeit“

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

eingeführt, definiert durch die Zeit, in der die Amplitude einer unbeeinflussten Schwingung auf den Wert $1/e$ abgeklungen ist, so ergibt sich

$$L_w \cdot \tau = E_w$$

$$L_w = \frac{2E_w}{\tau}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} L_w &= \frac{2 E_w}{\vartheta} = \frac{2 k T}{\vartheta} \text{ erg/sec} \\ &= \frac{2,7 \cdot 10^{-16} T}{\vartheta} \text{ erg/sec} \\ &= \frac{2,7 \cdot 10^{-23} T}{\vartheta} \text{ Watt.} \end{aligned} \right.$$

Die Abklingzeiten ϑ bewegen sich für die hörbaren und drahtlosen Frequenzen etwa zwischen 10^{-3} und 10^{-4} Sek. Für $\vartheta = 10^{-3}$ und Zimmertemperatur ergibt sich

$$L_w = 8 \cdot 10^{-18} \text{ Watt.}$$

Berücksichtigt man, daß eine Leistung von 10^{-7} Watt bei geeigneter Frequenz im Telephon noch gut hörbar ist, und daß eine 10000fache lineare Verstärkung, also eine 10^8 fache Leistungsverstärkung durchaus nichts Ungewöhnliches ist, daß also Anfangsleistungen von 10^{-15} Watt noch leicht wahrzunehmen sind, so erkennt man, daß die Wärmebewegung der Elektrizität, die einer Anfangsleistung von ca. 10^{-17} Watt entspricht, bereits verhältnismäßig nahe an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt. Wichtig ist hierbei, daß bei gegebener Leistungsverstärkung die Wärmebewegung desto eher störend auftritt, je kleiner die Abklingzeit ϑ , je größer also die Dämpfung des Eingangskreises ist. Dieses Resultat ist bemerkenswert im Gegensatz zu einem anderen, das wir im II. Teil ableiten.

Wird eine äußere Anregung des Schwingungskreises durch Signale ins Auge gefaßt, so bezieht sich das berechnete Verhältnis von Leistung und Energie nur auf eine Anregung mit der Resonanzfrequenz des Schwingungskreises. Bei gewissen Anordnungen ist hierbei auch der Energieverbrauch im Schwingungskreise gleich der maximalen Anfangsleistung zu setzen. In anderen Fällen bestehen zwischen maximaler Anfangsleistung, Energieverbrauch im Schwingungskreise und Verstärkung kompliziertere Beziehungen, die hier nicht erörtert werden können. Soweit der Eingangskreis für die Verstärkung maßgebend ist, werden jedoch in dem Resonanzgebiete die Verhältnisse noch am günstigsten liegen; es läßt sich also der Satz aussprechen, daß im allgemeinen bei einer beliebigen Art von Erregung nur dann Aussicht besteht, größere Endamplituden zu erhalten, als welche durch die Wärmebewegung im Eingangskreise veranlaßt werden, wenn die maximale

verfügbare Anfangsleistung den oben für L_W angegebenen Betrag in der Größenordnung von 10^{-17} Watt überschreitet. Die folgenden Überlegungen werden zeigen, daß durch eine andere Erscheinung der ungestörten Verstärkung noch eine engere Grenze gesetzt sein kann.

II. Teil. Der „Schroteffekt“.

Der Satz, daß die Wärmeenergie einer elektrischen Eigenschwingung gleich kT ist, bezieht sich auf alle Systeme, die im thermischen Gleichgewichte sind. Verbindung zweier verschiedener Metalle miteinander, das Auftreten von Kontaktpotentialdifferenzen, Einschaltung eines Elektrolyten zwischen zwei gleichartige Metallelektroden ändert nichts an diesem Gesetze. Ja sogar das Vorhandensein elektromotorischer Kräfte, welche einen Dauerstrom oder Wechselstrom fließen lassen, wird den Charakter der elektrischen Wärmeschwingungen nicht ändern, solange die freien Weglängen der elektrischen Teilchen genügend klein sind, um überall noch annähernd thermische Gleichverteilung eintreten zu lassen. Da in guten Leitern bekanntlich selbst bei starken Strömen noch annähernd an jeder Stelle Temperaturgleichgewicht besteht, so werden sich demnach hier die elektrischen Wärmeschwingungen — mit einer Energie, die einer mittleren Temperatur des Leitersystems entspricht — einfach über die stärkeren Ströme überlagern. Erst in Fällen, wo die Bewegung der Leitungselektronen stark von der thermischen abweicht, werden wir eine andere Energie der elektrischen Eigenschwingungen erwarten können. Derartige Fälle können z. B. bei sehr schlechten Leitern vorliegen, wo die elektrische Feldstärke — ohne allzu große Wärmeentwicklung zu veranlassen — so groß werden kann, daß auf einer freien Weglänge eines elektrischen Teilchens eine elektrische Feldenergie aufgenommen wird, die die mittlere thermische Energie überwiegt. Insbesondere ist so etwas denkbar in Fällen, wo der Potentialabfall in einzelnen dünnen Schichten oder Grenzflächen lokalisiert ist wie z. B. bei Einbettung eines guten Leiters in ein schlecht leitendes Material oder bei losem Kontakt von gleichartigen oder verschiedenartigen Leitern. Alles das sind kompliziertere Fälle, in denen die Berechnung der elektrischen Schwankungsenergie nur auf Grund neuer Annahmen mög-

lich ist. Einfachen Verhältnissen begegnen wir erst wieder am anderen Ende dieser Stufenreihe: wenn nämlich die freie Weglänge so groß geworden ist, daß jedes elektrische Teilchen das ganze angelegte Feld ohne Widerstand und Zusammenstoß durchläuft. Gerade dieser extreme Fall liegt nun bei gewissen auch zum Verstärken benutzten Entladungsröhren vor; sowohl die Hochvakuum-Glühkathodenröhren wie einige Restgasröhren arbeiten mit freien Weglängen, die groß sind gegen die Elektrodenentfernungen.

Als Beispiele für derartige Entladungsvorgänge erwähnen wir folgende:

1. Verdünntes Gas mit Strahlungsionisierung.

Der Ionisator Q sende Röntgenstrahlen oder kurzwelliges Licht in den verdünnten Entladungsraum zwischen Anode A und Kathode K . Die erzeugten Ionen entladen sich bei genügend geringem Drucke ohne Zusammenstöße oder Rekombination an die Anode und Kathode; jedem einzelnen Ionisierungsvorgange entspricht hierbei der Übergang von A nach K einer Elektrizitätsmenge, die gleich der Ladung des bei der Ionisation erzeugten positiven Ions ist. (Fig. 1).

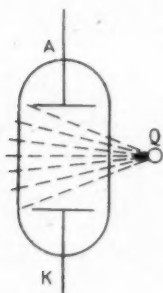


Fig. 1.

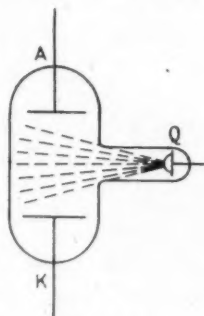


Fig. 2.

2. Verdünntes Gas mit korpuskularer Ionisierung.

Statt einer Strahlungsquelle kann auch ein Präparat, welches korpuskuläre Strahlen hoher Geschwindigkeit aussendet, als Ionisator gedacht werden, z. B. eine radioaktive Substanz (Fig. 2). Die nötige Geschwindigkeit kann jedoch den

ionisierenden Teilchen auch durch ein besonderes Feld erteilt werden; z. B. kann (Fig. 3) die Strahlungsquelle Q eine Glühkathode sein, aus der durch ein an A' angelegtes, beschleunigendes Feld Elektronen durch den Ionisierungsraum hindurchgezogen werden. Endlich fällt unter diese Gruppe auch die bekannte Glühkathodenverstärkerröhre mit Gitterelektrode, sofern noch ein Gasrest darin enthalten ist (Fig. 4). Die Glühkathode kann hierbei als Ionisierungs-

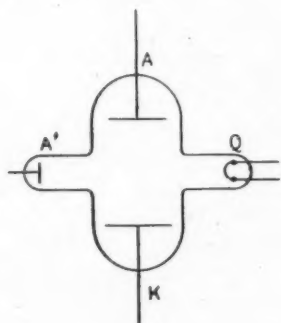


Fig. 3.

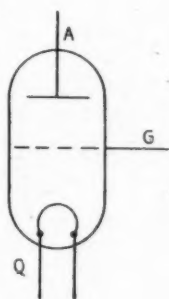


Fig. 4.

quelle angesehen werden; das durch das Gitter G hindurchgreifende Feld der Anode gibt den austretenden Elektronen genügend hohe Geschwindigkeit, um das Gas zwischen G und A zu ionisieren, und von den entstehenden Ionen wandern die negativen zur Anode, die positiven größtenteils zum Gitter. Ist das Gitter noch, wie bei den bekannten Betriebsbedingungen der Verstärkerrohre, genügend negativ gegen die Glühkathode Q , um das direkte Auftreffen von Elektronen zu verhindern, so ist der von G abfließende Strom ein reiner Gasionisierungsstrom.

3. Elektronenentladung im vollkommenen Vakuum.

Der Fall, wo von einer zum Glühen gebrachten Kathode K Elektronen durch den völlig gasfreien Entladungsraum zur Anode A übergehen, stellt das einfachste und reinste Beispiel

eines Entladungsvorganges dar, bei dem die elektrischen Teilchen das ganze angelegte Feld frei durchlaufen. Die übergehende Elementarladung ist dabei das bekannte negative Elektrizitätsquant $= 4,69 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. In den

Hochvakuumverstärkerröhren spielt sich ein derartiger Entladungsvorgang zwischen Kathode und Anode ab.

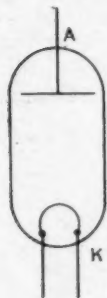


Fig. 5.

In allen aufgezählten Fällen tritt nun offenbar eine andere Art von Stromschwankung innerhalb des Entladungsrohres auf, als die durch die Wärmebewegung veranlaßte. Wegen der atomistischen Konstitution der Elektrizität stellt sich der Elektrizitätsübergang nicht als ein gleichmäßig fließender Strom, sondern als ein Hagel von Ladungsquanten dar, der selbst bei ganz regelmäßiger zeitlicher Verteilung zu Stromschwankungen Veranlassung geben würde, deren

Frequenz durch die Anzahl der pro Sekunde übergehenden Teilchen gegeben wäre. Nun findet aber sicher der Übergang nicht regelmäßig statt, sondern es treffen in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ bald mehr, bald weniger Ladungsquanten auf, so daß für jede willkürliche Periode τ eine Wechselstromkomponente des Entladungsstromes zu beobachten sein wird. In allen oben genannten Fällen bietet sich nun eine einfache naheliegende Annahme, welche gestattet, diese Stromschwankungen für eine beliebige Periode τ zu berechnen. Man hat nur vorauszusetzen, daß der Übergang eines Ladungsquants zwischen Kathode und Anode einen Elementarvorgang darstellt, dessen Eintreten in keinem zeitlichen Zusammenhang mit dem Übergang irgendeines anderen Ladungsteilchens steht. Daß diese Annahme in Fall 1 und 2 erfüllt ist, leuchtet ohne weiteres ein; auch beim Austritt von Elektronen aus einer Glühkathode wird sich jedoch diese Annahme kaum umgehen lassen, schon deshalb, weil die mittlere Entfernung zweier annähernd gleichzeitig austretender Elektronen bei den üblichen Stromstärken sehr viele Atomdurchmesser betragen muß. In allen betrachteten Fällen lassen sich also auf den Elektrizitätsübergang die Wahrscheinlichkeitsgesetze für die gänzlich ungeordnete zeitliche Verteilung von gleichartigen Elementarereignissen anwenden.

Wir berechnen zunächst auf einfachste Weise eine Größe, deren elektrische Bedeutung allerdings nicht ohne weiteres zu übersehen ist: das mittlere Schwankungsquadrat für eine vorgegebene Periode τ . Sei i_0 der zeitliche Mittelwert des Entladungsstromes während sehr langer Zeiten, i_τ der Mittelwert des Stromes während eines bestimmten ins Auge gefaßten Zeitintervalles τ . Sei ferner

$$j_\tau = i_\tau - i_0$$

die Abweichung des Stromes i_τ vom zeitlichen Durchschnitt. Dann ist die zu berechnende Größe der quadratische Mittelwert $\overline{j_\tau^2}$.

Ist N die mittlere Zahl der Elementarentladungen in einer Sekunde, so ist die mittlere Zahl der in einem Zeitintervall τ übergehenden Elementarladungen gleich $N\tau$. In einem bestimmten Zeitintervall τ findet dagegen in der Regel nicht diese Anzahl von Übergängen statt, sondern eine Anzahl n_τ , welche von $N \cdot \tau$ verschieden ist. Für den Mittelwert der Abweichung

$$n_\tau = n_\tau - N\tau$$

gilt, falls in dem Zeitintervall τ eine große Anzahl von Elementarereignissen stattfindet, unseren Voraussetzungen zufolge das bekannte Schwankungsgesetz

$$\overline{n_\tau^2} = N\tau.$$

Bezeichnet e die Elektrizitätsmenge, die bei einem einzelnen Elementarprozeß zwischen Anode und Kathode übergeht, so ist

$$j_\tau = \frac{e n_\tau}{\tau};$$

es ergibt sich also

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau^2} \overline{n_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau^2} \cdot N\tau,$$

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau} \cdot N$$

oder wegen

$$i_0 = eN$$

(3)

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{i_0 \cdot e}{\tau}$$

oder in anderer Form

(4)

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{i_0^2}{N\tau}.$$

Die wesentlichen Eigenschaften des Effektes lassen sich aus diesen Formeln bereits deutlich erkennen. Definieren wir eine Amplitude a des mittleren Wechselstromes durch

$$a = \sqrt{j_1^2},$$

so bestehen folgende Sätze:

1. *Die Amplitude des durch den „Schroteffekt“¹⁾ hervorgerufenen mittleren Wechselstromes bestimmter Periode ist bei gegebenem mittlerem Entladungsstrom proportional der Wurzel aus der Elementarladung, die bei einem Elementarvorgang von einer Elektrode zur anderen transportiert wird.*

Der Effekt würde also, im Gegensatz zum Wärmeeffekt, vollständig verschwinden, wenn die Elektrizität in beliebigen kleinen Quanten aufträte. Die absolute Größe des elektrischen Elementarquants bestimmt die Größenordnung des Effekts; eine Messung des Effekts würde umgekehrt einen Rückschluß auf die Größe des elektrischen Elementarquants gestatten. Falls in einem Gase bei jedem Elementarprozeß zweiwertige Ionen gebildet werden, müßte die Amplitude des Wechselstromes im Verhältnis $\sqrt{2}$ gegenüber dem Effekt bei einwertigen Ionen ansteigen. Einen besonders ausgeprägten Effekt hätte man in Fällen zu erwarten, wo die Ionisierung eines Gasteilchens oder das Austreten eines Elektrons als auslösende Ursache eines momentanen starken Ionisierungsvorganges wirkt; als Ladungsgröße würde dann nämlich die ganze bei dem ausgelösten Vorgange von einer Elektrode zur andern transportierte Elektrizitätsmenge auftreten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei der gewöhnlichen Glimmentladung derartige komplexe Entladungsvorgänge als unabhängige Elementarereignisse aufzufassen sind.

Unter Zugrundelegung von Gleichung (4) entspricht dem Satze 1 folgende Aussage:

2. *Bei gegebenen mittlerem Entladungsstrom ist die Amplitude des durch den Schroteffekt hervorgerufenen Wechselstromes bestimmter Periode umgekehrt proportional der Wurzel aus der*

1) Diese Bezeichnung ist mit Rücksicht auf die Entstehungsart gewählt; der Ausdruck „Schrot“ weist, wie im gewöhnlichen Sprachgebrauch, auf das Auftreten von einer großen Zahl gleichartiger Elementarteilchen hin.

sekundlichen Zahl der unabhängigen Elementarereignisse, die den Stromübergang veranlassen. Ferner liest man aus Gl. (3) noch folgende Sätze ab:

3. Bei gegebener Elementarladung wächst die Amplitude des Schroteffekt-Wechselstromes bestimmter Periode proportional der Wurzel aus dem mittleren Entladungsstrom.

Ein Anwachsen des Stromes verwischt also nicht etwa, wie man zunächst annehmen könnte, den Effekt, sondern läßt ihn immer stärker hervortreten; was abnimmt, ist nur das Verhältnis der Amplitude des Wechselstromes zu dem mittleren Gleichstrom, das gemäß der Bezeichnung

$$\frac{a}{i_0} = \sqrt{\frac{\pi}{i_0 T}}$$

mit der Stromstärke abnimmt.

4. Die Wechselstromamplitude des Schroteffekts ist verschieden, je nach der zugrunde gelegten Periode. Je kleiner die Periode, desto größer der Wechselstrom; die Amplitude wächst umgekehrt proportional der Wurzel aus der Periode.

Diese Beziehung gilt nur so lange, als innerhalb einer Periode noch eine größere Zahl von Elementarereignissen stattfindet; bei Benutzung von Formel (3) wird man das Aufhören dieser Voraussetzung daran erkennen können, daß der berechnete Wechselstrom in die Größenordnung des Gleichstromes fällt.

Die Bedeutung des Satzes 4 wird bei hohen Frequenzen eingeschränkt durch den Umstand, daß bei der Wahrnehmbarmachung und Messung hoher Frequenzen immer nur Mittelwerte über größere Zeiten wiedergegeben werden. Wir kommen zum Schlusse auf diesen Punkt zurück.

Wirkung des Schroteffektes auf einen Schwingungskreis.

Zur Beurteilung der absoluten Größe des Effekts sind die einfachen Formeln (3) und (4), wie erwähnt, wenig geeignet, da die genaue physikalische Bedeutung des mittleren Stromschwankungsquadrates ebenso schwer anzugeben ist, wie eine direkte Meßmethode dieser Größe. Es soll deshalb nunmehr ein besonderer Fall mit physikalisch vollständig definierten Bedingungen näher untersucht werden, nämlich die Anregung eines abgestimmten gedämpften Schwingungskreises durch den Schroteffekt. Wir können dann die auftretende Schwin-

gungsenergie direkt mit der Energie der Wärmeschwingungen, sowie mit einer dem Schwingungskreise zugeführten Signalenergie vergleichen und haben damit ein Urteil über die Bedeutung des Effekts gewonnen.

Eine induktive Einwirkung des Entladungsstromes auf äußere Schwingungskreise kommt bei der geringen Induktivität der Entladungsbahn kaum in Frage. Der wichtigste Fall ist der, wo ein Schwingungskreis und eine Entladungsröhre in denselben Stromkreis eingeschaltet sind, und zwar liegt, den hohen Widerständen der Entladungsröhren ent-

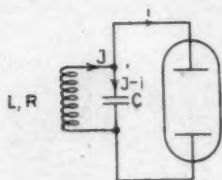


Fig. 6.

sprechend, gewöhnlich der Schwingungskreis so an der Röhre, daß er auf Spannungsschwankungen anspricht, also entsprechend der Schaltung in Fig. 6.

Von der Existenz mehrerer Eigenschwingungen in dem Schwingungskreis L, R, C sehen wir vorläufig ab. Die zu lösende Aufgabe

hat dann sehr viel Ähnlichkeit mit einer von M. Planck in seiner älteren Strahlungstheorie behandelten: es ist die mittlere Energie eines gedämpften Oszillators unter der Einwirkung ganz unregelmäßiger Anstöße zu berechnen, wobei jedoch die „spektrale Verteilung“ der erregenden Oszillation nicht durch das Wärmestrahlungsgesetz, sondern durch das „Fehlgesetz“ bestimmt ist.

Wir behandeln nacheinander folgende Teilaufgaben:

1. Berechnung der Energie des Schwingungskreises unter der Wirkung periodischer Ströme in der Entladungsröhre.
2. Berechnung der mittleren Energie des Schwingungskreises unter der Wirkung vieler verschiedener periodischer Ströme in der Entladungsröhre (entsprechend einer Fourierschen Zerlegung).
3. Auswertung der Mittelwertausdrücke unter Zugrundelegung der Annahme der „unabhängigen Elementarereignisse“.

1. Bezeichnen J und i die Ströme in der Induktionspule und im Entladungsrohre in der in Fig. 6 durch Pfeile bezeichneten Richtung, so ist

$$L \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} \int J dt - RJ = \frac{1}{C} \int i dt,$$

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{1}{LC} J - \frac{R}{L} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{LC} i,$$

oder, mit Einführung der Eigenschwingung des Schwingungskreises

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

und der Dämpfungskonstanten

$$\varrho = \frac{R}{L}:$$

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \omega_0^2 J - \varrho \frac{dJ}{dt} = \omega_0^2 i.$$

Ist i eine periodische Funktion

$$i_k = C_k \cdot \sin(\omega t + \varphi_k),$$

so ergibt sich als stationäre Lösung

$$J_k = a_k \cdot \sin(\omega t + \varphi_k'),$$

wobei

$$a_k = C_k \omega_0^2 \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \varrho^2 \omega^2}},$$

oder mit

$$\frac{\omega}{\omega_0} = x, \quad \frac{\varrho}{\omega_0} = r$$

$$a_k = C_k \sqrt{\frac{1}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}}$$

ist. Die Energie der Schwingung ist $E_k = \frac{1}{2} L a_k^2$, also

$$(5) \quad E_k = C_k^2 \cdot L \frac{1}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}.$$

2. Wir denken uns nun den wirklichen in der Entladungsröhre fließenden Strom mit seinen durch den Schrotteffekt veranlaßten Schwankungen zwischen der Zeit $t=0$ und der großen Zeit $t=\mathfrak{T}$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt.

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} i_k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

wobei

$$\left[\omega_k = \frac{2\pi k}{\mathfrak{T}} \right]$$

Der durch den Schroteffekt veranlaßte Mittelwert der Energie des Schwingungskreises $\overline{E_s}$ ist dann gegeben durch

$$(6) \quad \overline{E_s} = \sum E_k = L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}.$$

Hierbei hängt

$$x = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \mathfrak{T}} \cdot k$$

ebenfalls von der Ordnungszahl k ab.

3. Indem wir den Ausdruck (6) unter Zugrundelegung bekannter Eigenschaften des Schroteffektes auswerten, machen wir die vereinfachende Voraussetzung, daß der Strom i nicht durch die Spannungsschwankungen beeinflusst wird, welche die im Kreise L, R, C vorhandene elektrische Schwingung an den Elektroden der Entladungsröhre hervorruft. Die Schwankungen des Stromes i sind dann durch zufällige Schwankungen der Zahl der Elementarvorgänge allein gegeben.

Für jede Teilerscheinung ist

$$C_k = \frac{2}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} i \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) dt,$$

oder, wenn $i = i_0 + j$ gesetzt wird,

$$C_k = \frac{2}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} j \sin(\omega_k t + \varphi_k) dt,$$

da

$$\int_0^{\mathfrak{T}} i_0 \sin(\omega_k t + \varphi_k) dt = 0$$

ist.

Die Werte C_k werden wegen des unregelmäßigen Charakters des Schroteffektes mit der Ordnungszahl k rasch und unregelmäßig schwanken. Bei genügend großem \mathfrak{T} werden jedoch zu einem kleinen Gebiete zwischen x und $x + \Delta x$ eine beliebig große Zahl von verschiedenen Werten k und Koeffizienten C_k gehören. Es ist infolgedessen gestattet, die Mittelwertbildung über C_k^2 innerhalb eines gewissen Bereiches vorzunehmen, ohne die Veränderlichkeit von x dabei zu berücksichtigen.

Seien k_1 und k_2 um sehr viele Einheiten voneinander verschiedene Zahlen, die aber nur einer im Verhältnis zu 1

geringen Änderung von x entsprechen. Wir haben dann den Ausdruck zu bilden

$$(7) \quad \sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \left\{ \int_0^{\pi} j \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right\}^2.$$

Ein einzelnes Glied der Summe läßt sich in der Form schreiben:

$$(8) \quad \int_{t=0}^{\pi} \int_{t'=0}^{\pi} j j' \sin(\omega_k t + \varphi_k) (\sin \omega_k t' + \varphi_k) dt dt'.$$

Wir bemerken nun noch, daß der Wert von $\overline{C_k^2}$ nur für Frequenzen ω_k gebildet zu werden braucht, die nicht ein sehr großes Vielfaches von der Eigenfrequenz des Schwingungskreises, ω_0 , sind. Denn aus Gl. (6) ergibt sich, daß die Frequenzen, die sehr hohen k -Werten entsprechen, zu der mittleren Energie $\overline{E_s}$ verschwindend wenig beitragen. Machen wir nun weiter die Voraussetzung, (daß für alle Frequenzen, die in der Größenordnung von ω_0 und darunter liegen) innerhalb einer Periode τ_k noch sehr viele Elementarvorgänge stattfinden, d. h. also, daß in die Eigenperiode τ_0 des Schwingungskreises sehr viele Elementarvorgänge fallen, so wird auch angenommen werden können, daß in einem solchen Bruchteil der Periode, in dem sich der Wert von $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ nur verschwindend wenig ändert, noch viele Elementarvorgänge stattfinden. Wir können dann ohne Fehler statt der Zeitelemente dt und dt' so große Zeitelemente Δt und $\Delta t'$ einführen, daß die Zahl $n \Delta t$ der in der Zeit Δt übergehenden Elementarladungen noch groß ist; desgleichen für $\Delta t'$.

Dieser Umstand rechtfertigt a posteriori die Einführung einer Stromgröße j bei dem betrachteten Effekt. Müßten unendlich kleine Zeitelemente betrachtet werden, so würde ja, je nachdem, ob in den betreffenden Zeitpunkt gerade eine Ladung übergeht oder nicht, die Stromwerte $j = \infty$ oder $j = 0$ angenommen werden.

Der Ausdruck (8) geht dann über in die Doppelsumme

$$(9) \quad \sum_{t=0}^{\pi} \sum_{t'=0}^{\pi} j \Delta t \cdot j' \Delta t' \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) (\sin \omega_k t' + \varphi_k),$$

wobei für t und t' jedesmal Werte gesetzt werden können, die in der Mitte der Zeitintervalle Δt und $\Delta t'$ liegen.

Den Ausdruck (9) zerlegen wir nun in zwei Teile. Der erste Teil soll alle Glieder der Summe enthalten, in denen $t = t'$, $j = j'$, $\Delta t = \Delta t'$ ist; man erhält dann die einfache Summe

$$(10) \quad \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} (j \Delta t)^2 \sin^2(\omega_k t + \varphi_k).$$

Nun sind nach unserer Voraussetzung innerhalb der Zeit \mathfrak{T} sehr viele Perioden vorhanden. Es treten also in der Summe sehr viele Glieder auf, in denen $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ denselben Wert hat. Mithin ist es gestattet, für jeden Wert des Sinus mit dem Mittelwert von $(j \Delta t)^2$ zu multiplizieren. Dieser Mittelwert ist aber von t unabhängig; da $j \Delta t = e \cdot \pi_A$ und nach dem bereits herangezogenen Schwankungsgesetze

$$\overline{n_{At}^2} = N \cdot \Delta t$$

ist, so ergibt sich

$$(j \Delta t)^2 = e^2 \overline{n_{At}^2} = e^2 N \Delta t = e i_0 \Delta t.$$

Es geht also (10) über in

$$\begin{aligned} e i_0 \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} \sin^2(\omega_k t + \varphi_k) \Delta t \\ = e i_0 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist von der Ordnungszahl k unabhängig; nach Einsetzen in (7) ergibt sich also als Betrag von

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2,$$

soweit der erste Teil der Doppelsumme (9) in Frage kommt, der Ausdruck

$$(11) \quad \frac{2}{\mathfrak{T}} (k_2 - k_1) e i_0.$$

Wir zeigen nun, daß der andere, bisher nicht betrachtete Teil der Doppelsumme (9) zu dem Ausdruck (7) nur einen gegen (11) verschwindend kleinen Beitrag liefert. Wir können uns dabei auf Größenordnungsbetrachtungen beschränken. Da alle Werte j und j' , die sich nicht auf das gleiche Intervall Δt beziehen, voneinander unabhängig sind und ebenso oft positiv wie negativ sein können, besteht auch der Rest der Summe (9) aus lauter Summanden, die ebenso oft positiv

wie negativ sein können. Die Multiplikation mit den Sinusfunktionen, die ebenfalls ebenso oft positiv wie negativ sind, ändert nichts an dieser Tatsache; die Größenordnung des Sinusproduktes ist 1, die Anzahl der zu betrachtenden Summanden

$$\frac{\mathfrak{I}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathfrak{I}'}{\Delta t'}$$

Nun ist bekanntlich die Größenordnung einer Summe von p Gliedern der Größenordnung a , die ebensogut positiv wie negativ sein können, von der Größenordnung $\sqrt{p} \cdot a$, und zwar kann dieser Ausdruck ebensogut positiv wie negativ sein. Da nun das Produkt $j \Delta t \cdot j' \Delta t'$ von der Größenordnung

$$(j \Delta t)^2 = i_0 e \Delta t$$

ist, so ergibt sich als Größenordnung für den zweiten Teil der Doppelsumme (9) der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathfrak{I}'}{\Delta t'}} \cdot e i_0 \Delta t = \mathfrak{I} e i_0.$$

Man sieht also, daß das Restglied für jeden einzelnen k -Wert von derselben Größenordnung ist wie das für alle k -Werte gleiche Glied, das wir oben berechneten. Da dieses Restglied ebenso oft positiv wie negativ sein kann, so schwankt also der Wert von C_k^2 für jedes einzelne k -Glieder nach beiden Seiten um Werte von der Größenordnung seines mittleren Betrages. Werden nun aber viele Glieder C_k^2 zusammengefaßt, so liefert der zweite Teil der Doppelsumme, zufolge dem schon erwähnten Gesetze, nur noch einen Betrag zu (7) von der Größenordnung

$$\sqrt{k_2 - k_1} \cdot \mathfrak{I} \cdot e \cdot i_0.$$

Sobald also $k_2 - k_1$ groß genug gewählt ist, verschwindet dieser Teil gegen den durch (11) wiedergegebenen Teil und wir erhalten

$$(12) \quad \sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2 = (k_2 - k_1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot e i_0.$$

Mithin ist der Mittelwert von C_k^2 von k unabhängig, sofern nur eine genügend große Anzahl Glieder zusammengefaßt werden; es ist

$$\overline{C_k^2} = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2}{k_2 - k_1} = \frac{2}{\pi} \cdot e \cdot i_0. \quad \rightarrow 4$$

Dieses Resultat setzen wir nunmehr in den Ausdruck (6) für die Energie \overline{E}_S ein. Es wird

$$(13) \quad \overline{E}_S = L e i_0 \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}.$$

Da

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{\mathfrak{Z}} \quad \text{und} \quad x_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}$$

ist und da nach unseren früheren Ausführungen einem Fortrücken von k um eine Einheit nur eine sehr kleine Änderung von x entspricht, kann gesetzt werden

$$1 = \frac{\mathfrak{Z}}{2\pi} \cdot (\omega_k - \omega_{k-1}) = \frac{\mathfrak{Z}}{2\pi} \cdot \omega_0 dx,$$

und statt der Summation über alle Werte k ist die Integration über x auszuführen.

Mithin wird

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}$$

oder, nach Auswertung des bestimmten Integrals,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{2\pi}{r^2}.$$

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{\omega_0}{r^2} = \frac{\omega_0^3}{q^2}.$$

Es wird also schließlich

$$(14) \quad \overline{E}_S = \frac{\omega_0^3}{q^2} \cdot \omega_0 L \cdot e i_0.$$

Wird die Eigenperiode

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

und die Abklingzeit

$$\vartheta = \frac{2}{q}$$

eingeführt, so wird in technisch übersichtlichster Gruppierung

$$(14) \quad \overline{E}_S = e \cdot \left(\frac{\pi \vartheta}{\tau} \right)^2 \cdot \omega_0 L \cdot i_0$$

oder in mathematisch einfachster Form

$$(14'') \quad \overline{E}_S = \frac{2\pi^3 e L \vartheta^2 i_0}{\tau^2}.$$

Aus dem Vergleich von (14) mit (5), wo alsdann $\pi = 1$ zu setzen ist, leiten wir folgenden Satz ab:

Die durch den Schroteffekt verursachten Stromschwankungen in einer Entladungsröhre wirken auf einen parallel geschalteten Resonator von der Eigenperiode τ und beliebiger Dämpfung so, als ob in der Entladungsröhre ein rein sinusförmiger Wechselstrom von der Periode τ und der effektiven Amplitude

$$\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{e i_0}{\tau}}$$

vorhanden wäre.

Damit ist die physikalische Zulässigkeit unserer vorausgeschickten Annäherungsrechnung in einem wichtigen Falle bestätigt; die genaue effektive Amplitude des zu substituierenden Wechselstromes unterscheidet sich in diesem Falle von der durch Gleichung (3) bestimmten nur durch den Faktor $\sqrt{\pi}$.

Was den Charakter (die Reinheit) der in dem Schwingungskreise L, R, C durch den Schroteffekt verursachten Schwingung betrifft, so ist dieser offenbar genau derselbe wie bei der Wärmeschwingung; die Reinheit der Schwingung ist wieder durch das Verhältnis der Abklingzeit θ zur Periode τ bedingt. Dies gilt, solange in der Zeit τ eine große Zahl von Elementarvorgängen stattfindet; in diesem, dem vermutlich einzig meßbaren Falle, ist also der Ursprung der Schwingung aus ihrer Art nicht zu erkennen, nur die Größe des Effektes ist verschieden. Wie weit die Gesetze der großen Zahlen bei technischen Strömen und Frequenzen noch anwendbar sind, mag aus der Tatsache erhellen, daß bei einem Gleichstrom von 10^{-12} Amp. immer noch in 1 millionstel Sekunde ca. 1000 Elementarladungen übergehen.

Wie groß ist nun die von dem Schroteffekt verursachte Schwingungsenergie in unserem Schwingungskreise im Verhältnis zu der Wärme-Schwingungsenergie kT ? Unter der Annahme, daß die bei einem Elementarvorgang übergehende Ladung ihren kleinsten Betrag, $\varepsilon = 4,69 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. hat, ergibt sich, in technischen Energieeinheiten ($\varepsilon = 1,56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb),

$$\overline{E_s} = 1,55 \cdot 10^{-18} \frac{9^2}{\tau^2} \omega_0 L i_0.$$

In der Verstärkertechnik gebräuchliche Werte sind $\frac{\vartheta}{\tau} = 3$ bis 30, $\omega_0 L \cdot i_0 = 10^{-3}$ bis 1. Danach bewegt sich $\overline{E_s}$ zwischen ca. 10^{-20} und 10^{-15} technischen Energieeinheiten; die durch den Schroteffekt verursachte Energie der Schwingung eines einfachen Schwingungskreises ist also doppelt bis 200000mal so groß als die durch die Wärmebewegung bei Zimmertemperatur hervorgerufene Energie der Eigenschwingung.

Ebenso wie im I. Teil bei der Wärmebewegung kann nun zu der mittleren Energie $\overline{E_s}$ eine Leistung L_s angegeben werden, die notwendig wäre, um durch Anregung von außen (z. B. induktiv) die Schwingungsenergie im Kreise L, R, C dauernd aufrecht zu erhalten. Entsprechend der oben eingeführten Annahme, daß die Spannungsschwankungen am Kondensator keine Stromänderung in der Röhre verursachen, kann hierbei von einem Energieverbrauch durch die Röhre abgesehen werden, und es muß nur die im Verlustwiderstand des Schwingungskreises verbrauchte Energie dauernd zugeführt werden. Wie früher ergibt sich

$$L_s = \frac{2 \overline{E_s}}{\vartheta},$$

also aus (14')

$$(15) \quad L_s = \frac{2 \pi^2 e \omega_0 L \vartheta i_0}{\tau^2}.$$

Ist der betrachtete Schwingungskreis der Empfangskreis einer Verstärkeranordnung, so kann L_s wieder mit der maximalen Anfangsleistung, die durch ein gegebenes schwaches Signal dem Empfangskreise mitgeteilt werden kann, verglichen und der Satz aufgestellt werden, daß zur Verfügung stehende Anfangsleistungen, die kleiner als L_s sind, von der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Schwingung überdeckt werden. L_s bietet also wiederum ein Maß für die kleinsten noch aufnehmbaren Empfangsenergien, und zwar handelt es sich diesmal um die ausschlaggebende Berechnung, da, wie wir feststellten, der Schroteffekt zu größeren Störungen Anlaß gibt als der Wärmeeffekt.

Wir lesen aus Gl. (15) folgende Sätze ab:

1. Der Schroteffekt gibt desto eher zu Störungen Anlaß, je größer die Abklingzeit, je kleiner also die Dämpfung des Empfangskreises ist.

2. Die Störung durch den Schroteffekt ist desto größer, je größer die Induktanz des Eingangskreises bei der Resonanzschwingung ist.

3. Die Störung erreicht desto größere Werte, je kleiner die Resonanzperiode des Eingangskreises ist.

Die Abhängigkeit von i_0 und e wurde schon früher diskutiert.

Ist e gleich der Elementarladung eines Elektrons, so wird

$$L_s = 3,1 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{\omega_0 L \vartheta i_0}{r^2}.$$

ϑ hat die mittlere Größenordnung $1/1000$ Sekunde. Bei Entladungsröhren mit Elektronen oder einwertigen Ionen von großer Weglänge bewegt sich also die Leistung, die dem Anfangskreise durch den Schroteffekt zugeführt wird, unter Zugrundelegung der oben für $\overline{E_s}$ angegebenen Grenzen zwischen 10^{-17} und 10^{-12} Watt. Da 10^{-15} Watt eine durch Verstärkung gut wahrnehmbar zu machende Leistung darstellt, ist es klar, daß der Schroteffekt sich in der Verstärkertechnik unangenehm bemerkbar machen muß; sicher ist er schon öfter beobachtet worden, ohne daß man seine Ursache erkannte.

Von theoretischem Interesse ist die quantitative Bestimmung der Elementarladung aus der Größe der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Stromschwankungen. Hierbei wird es zweckmäßig sein, nicht die in den Verstärkeröhren selbst auftretenden Störungen zu benutzen, sondern zu einem Schwingungskreise eine besondere Entladungsröhre, beispielsweise eine Glühkathodenröhre mit hohen Entladungsströmen i_0 parallel zu legen und dann die in dem Schwingungskreise auftretenden Schwankungen zu verstärken. Derartige Versuche sollen im K-Laboratorium des Wernerwerkes von Siemens & Halske demnächst ausgeführt werden.

Zur Vervollständigung des Bildes mag zum Schluß auf zwei verallgemeinernde Betrachtungen noch kurz hingewiesen werden.

Falls an Stelle des einfachen Schwingungssystems L, R, C Systeme mit vielen verschiedenen Eigenschwingungen betrachtet werden, kann die durch den Schroteffekt verursachte Energie jeder einzelnen Eigenschwingung so berechnet werden, als ob die übrigen Eigenschwingungen nicht vorhanden wären. Jeder

dieser Eigenschwingungen entspricht dann ein gewisser Energieverbrauch in dem schwingenden Gebilde, und zwar steigt die Energie und demnach der Energieverbrauch mit der Frequenz an. Wenn über alle Schwingungen bis zu Perioden, die ungefähr der mittleren Zeitspanne zwischen zwei Elementarentladungen entsprechen, summiert wird, kann sich mithin ein recht erheblicher Gesamtbetrag von Energie ergeben, der ständig in dem schwingenden Gebilde verbraucht und dort in Wärme umgesetzt wird. Als Energiequelle kommt hierbei, wie in der ganzen Bilanz der Verstärkerröhren, die zwischen den Elektroden der Entladungsröhre liegende Batterie in Frage; es wird durch den Effekt einfach ein Teil des Energieverbrauches von der Oberfläche der Elektroden nach dem Innern des Schwingungskreises hin verlagert. Die Röhre wirkt also allein wegen der atomistischen Struktur der Elektrizität in einem gewissen Grade als Schwingungserzeuger.

Eine zweite Verallgemeinerung besteht in der Berücksichtigung der *Rückwirkung der Spannungsschwankungen* auf die Größe der Stromschwankungen in der Röhre. Es genüge, hierbei wieder den Fall eines einfachen Schwingungskreises ins Auge zu fassen und darauf hinzuweisen, daß dann die durch den Schroteffekt hervorgerufene Schwingungsenergie nicht, wie es nach Formel (14') den Anschein hat, bei gegebenem τ mit wachsendem ϑ und L ins Unendliche wächst, sondern einen Höchstwert erreicht, der nur von den inneren Eigenschaften der Röhre und von dem Ausdruck ei_0/τ abhängt.

Ein Einwand kann gegen die Berechnung der „kleinsten noch wahrnehmbaren Signalenergie“ erhoben werden, den wir nicht unberücksichtigt lassen können, sollen die entwickelten Gedankengänge nicht allzu unvollständig erscheinen. Wir nahmen an, daß ein Signal nicht mehr deutlich wahrnehmbar ist, wenn es im Eingangskreise einer Verstärkeranordnung Spannungsschwankungen hervorruft, die nicht größer sind als die durch Dauerstörungen, z. B. durch den Schroteffekt verursachten. Das gilt aber nur dann, wenn in dem Endkreise der Anordnung Systeme vorhanden sind, die auf dieselbe Frequenz ansprechen wie das Eingangssystem. In der drahtlosen Technik ist z. B. diese Bedingung nicht erfüllt; die Endperioden sind bedeutend länger als die Eigenperiode des Eingangskreises, die Gefahren der hohen Frequenzen treten

dann nicht in dem Maße auf, wie es nach Formel (15) den Anschein haben müßte.

Zur Klarlegung der Verhältnisse betrachten wir gleich den Extremfall sehr langer Endperioden. Werden die Schwingungen im Eingangskreise genügend verstärkt und hinter der Anordnung z. B. mit einem Hitzdrahtinstrumente gemessen oder gleichgerichtet und am Galvanometer abgelesen, so ist klar, daß der Unterschied in den Dauerausschlägen ohne und mit konstanter Signalerregung von derselben Größenordnung sein müßte, gleichgültig, ob Dauerstörungen vorhanden sind oder nicht. Nur die Nullstellung des Zeigers würde verschoben sein, und man könnte glauben, durch eine Kompensationsmethode den Einfluß der Dauerschwingungen im Eingangskreise überhaupt auszuschalten.

In der Tat ist hiermit ein Weg gewiesen, die Störungen durch den Wärme- und Schroteffekt weitgehend zu beseitigen und bedeutend kleinere Signalenergien als die durch die Formeln (2) und (15) angegebenen wahrnehmbar zu machen. Aber auch diese Möglichkeit hat ihre Grenzen. In der Natur des ganz unregelmäßigen Charakters des Schroteffektes liegt es, daß auch innerhalb größerer Perioden Schwankungen in der mittleren Intensität auftreten; die Nadel des Ableseinstrumentes würde also nicht ganz ruhig stehen, sondern mit ihrer eigenen Periode Schwankungen ausführen, die die Ablesung wesentlich kleinerer Dauereffekte unmöglich machen würde. Auch in diesem Falle muß also ein Minimalwert für die noch ungestört aufnehmbare Energie existieren. Unter der Annahme, daß das Endinstrument die Energien im Eingangskreise während einer großen Periode P mittelt, ergibt eine angenäherte Überlegung, daß die dann noch ungestört aufnehmbaren Minimalleistungen sich von den durch Formel (15) wiedergegebenen durch den Faktor $\sqrt{\tau/P}$ unterscheiden. Hierbei bedeutet τ wieder die Eigenperiode des Eingangskreises, und es ist vorausgesetzt, daß P groß gegen die Abklingzeit des Eingangskreises ist. Für lange Endperioden (Größenordnung 10 Sekunden) erniedrigt sich also die wahrnehmbare Minimalenergie von Signalen im Gebiete der Hörfrequenz bis zu drahtlosen Frequenzen noch um das Hundert- bis Zehntausendfache.

Zusammenfassung.

1. Infolge der Wärmebewegung treten in elektrischen Schwingungskreisen Dauerschwingungen von geringer Amplitude auf, die sich bei genügend hoher Verstärkung bemerkbar machen müßten und sehr schwache Signale überdecken würden.

2. Die Energie dieser Wärmeschwingungen ist in allen Systemen, die sich angenähert im Wärmegleichgewicht befinden (z. B. metallische Leiter) gleich $k \cdot T$, also unabhängig vom Material sowie von der Größe der elektrischen Elementarladung.

3. Es wird die Leistung, welche zur Aufrechterhaltung einer Schwingung von der mittleren Energie der Wärmeschwingung notwendig ist, berechnet und unter gewissen Bedingungen der kleinsten Signalleistung gleichgesetzt, die durch eine Verstärkerschaltung noch störungsfrei verstärkt werden kann. Die so berechnete Minimalleistung liegt einige Zehnerpotenzen unter den mit den gebräuchlichen Verstärkerschaltungen noch aufnehmbaren minimalen Leistungen. Sie ist desto kleiner, je kleiner die Dämpfung des in Betracht kommenden Schwingungskreises ist.

4. Andere Gesetze gelten für die Schwingungserregung, sobald Systeme mit ins Spiel kommen, bei denen die Bewegung der elektrischen Elementarteilchen nicht mehr quasi-thermisch ist. Es wird der entgegengesetzte Grenzfall der unendlich großen freien Weglängen behandelt, wie er in sehr verdünnten Gasen und bei Hochvakuum-Glühkathodenentladungen realisiert ist.

5. Bei dieser Gruppe von Erscheinungen, die unter dem Namen des Schroteffektes zusammengefaßt werden, sind die mittleren Stromschwankungen durch die Zahl der voneinander unabhängigen Elementarladungen, im einfachsten Falle durch die Größe des elektrischen Elementarquantums, bestimmt. Für eine gegebene Periode τ wird in angenäherter Rechnung die Amplitude des in einem mittleren Entladungsstrom i_0 enthaltenen Wechselstromes der Periode τ zu $\sqrt{e i_0 \tau}$ ermittelt, wobei e die bei einem unabhängigen Elementarvorgang von einer Elektrode zur anderen transportierte Ladung bedeutet.

6. Für einen besonderen, in der Verstärkertechnik wichtigen Fall wird die Rechnung streng durchgeführt. Es wird

die mittlere Energie eines Schwingungskreises berechnet, der parallel zu einer Entladungsröhre liegt. Die mittlere Energie dieser durch den Schroteffekt hervorgerufenen Schwingung ist, in angenäherter Übereinstimmung mit 5, ebenso groß, als ob in dem Entladungsstrom i_0 eine Wechselstromkomponente von der Amplitude $\sqrt{\pi} \sqrt{e i_0 / \tau}$ vorhanden wäre. τ bedeutet hierbei die Eigenperiode des Schwingungskreises.

7. Es wird auf eine Methode hingewiesen, um aus der Messung der durch den Schroteffekt hervorgerufenen und dann verstärkten Schwingungen die Größe des elektrischen Elementarquantums zu ermitteln.

8. Die mittlere Leistung, welche zur Aufrechterhaltung der Schroteffektschwingungen notwendig ist, wird wieder in Beziehung gesetzt zur kleinsten noch ungestört wahrnehmbaren Signalenergie. Es ergibt sich, daß der Schroteffekt die wahrnehmbare Minimalleistung noch beträchtlich enger begrenzt als der Wärmeeffekt. Er kann bereits bei den gebräuchlichen Verstärkungszahlen zu Störungen Anlaß geben.

9. Die dem Schroteffekt entsprechende Leistung und damit die kleinste noch wahrnehmbare Signalenergie zeigt bei einem einfachen Schwingungskreise folgende Abhängigkeiten: Sie wächst mit der dritten Potenz der Eigenfrequenz, mit der ersten Potenz der Abklingzeit und proportional der Selbstinduktion des Schwingungskreises. Ferner ist sie dem mittleren Entladungsstrom und der Größe der Elementarladung proportional.

10. Es wird der Einfluß einer Rückwirkung der Schwingungen auf den Entladungsstrom, ferner der Fall mehrfacher Eigenschwingungen kurz behandelt und schließlich bemerkt, daß sich die Größe der auftretenden Stromschwankungen durch Verwendung träger Endinstrumente um einige Zehnerpotenzen herabdrücken läßt.

Charlottenburg, den 26. Juni 1918.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

4. Die Beugungserscheinungen, welche an einer großen Anzahl unregelmäßig verstreuter Öffnungen oder undurchlässiger Teilchen auftreten;
von W. J. de Haas.

1. Wenn vor dem Objektiv eines auf einen entfernten Punkt eingestellten Teleskopes ein Schirm aufgestellt worden ist, mit einer großen Anzahl unregelmäßig verteilter gleicher kreisförmiger Öffnungen, so nimmt man ein bekanntes Beugungsbild wahr. Bekanntlich sieht man dasselbe, wenn man anstatt des Schirmes mit den Öffnungen einen durchlässigen Schirm aufstellt, bestreut mit vielen unregelmäßigen Teilchen, z. B. eine Glasplatte mit Lycopodiumteilchen. Das Beugungsbild besteht aus dem hellen von Ringen umgebenen Flecke, den eine einzelne Öffnung geben würde und der jetzt Intensitätsschwankungen aufweist, welche man mit einer faserigen radialen Struktur vergleichen kann. v. Laue¹⁾ hat dieses Phänomen untersucht und kommt zu dem Schlusse, daß es aus der klassischen Optik nicht erklärt werden kann. In dieser Mitteilung werde ich auseinandersetzen, aus welchen Gründen ich die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung in Zweifel ziehe. Ich möchte jedoch bemerken, daß ich keinerlei Bedenken hege gegen die theoretischen Betrachtungen von v. Laue über die Beugungserscheinungen mit monochromatischem Lichte.²⁾

2. Nicht alle meine Versuche werde ich ausführlich beschreiben. Ich habe mich auf visuelle Beobachtung beschränkt. Die Beugungserscheinungen wurden auf zwei Weisen untersucht. Zuerst gebrauchte ich gedrehte Kupferringe mit dünnem,

1) M. v. Laue, Die Beugungserscheinungen an vielen unregelmäßig verteilten Teilchen, Sitzungsber. Akad. Berlin. p. 1144. 1914; Mathematische Betrachtungen über die Beugungserscheinungen an vielen unregelmäßig verstreuten Teilchen, Mitteilungen Physik. Gesellsch. Zürich. p. 90. 1916; Ein Versagen der klassischen Optik, Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. p. 19. 18. Jahrg. 1917.

2) Vgl. Proc. Roy. Soc. Amsterdam. Vol. XX. p. 1278.

in Tusche getränktem und naß aufgespanntem Papier. Getrocknet lieferte dies einen gut undurchlässigen, straff gespannten Schirm. In diesen Schirm wurden mit einer feinen Nadel Öffnungen gestochen, deren Größe variiert werden konnte. Dazu war die Nadel in einem runden Halter befestigt, der in einem passenden zylindrischen Röhrchen hin und her gleiten konnte, um schließlich in einem bestimmten Stand fixiert zu werden. Dies ermöglichte es, alle Öffnungen gleich groß zu machen und zu gleicher Zeit ihre Größe abzuändern (nämlich durch Hervorstechenlassen eines größeren oder kleineren Teiles der Nadelspitze aus dem Zylinderchen).

Bei der zweiten Methode arbeitete ich mit Glasplatten, mit Lycopodiumpulver oder mit solchen, auf welche durch Verdampfung Quecksilberkügelchen niedergeschlagen worden waren. Das Quecksilber kann man leicht niederschlagen in Kügelchen von $\frac{1}{200}$ mm oder noch kleiner. Ihre Größe ist jedoch ungleich. Ich hatte drei solche Platten.

Die erste Methode liefert viele Vorteile. Man kann das Phänomen bei zunehmender Öffnungszahl Schritt für Schritt verfolgen, während für den Fall, daß das gebeugte Licht dieselbe Intensität hat wie das direkt einfallende der Bogenlampe, dies letztere nicht blendend wirkt wie bei den anderen Methoden. Mit dem Auge kann man so die Details der Erscheinung viel schneller, genauer und bequemer beobachten als mit der Photographie, während das Auftreten von Farbenerscheinungen nicht unbeachtet bleiben konnte.

Die Lichtquelle war eine Bogenlampe auf ca. 5 m Abstand vom Objektiv des Fernrohres. Sie war möglichst vollkommen abgeschirmt, während die Öffnungen in einem drehbaren bleiernen Schirme die „Lichtpunkte“ lieferten. Damit die Versuche variiert werden könnten, waren Öffnungen von der Größe 0,5, 0,4, 0,3, 0,25, 0,15 mm angebracht worden.

Es fiel mir auf, daß man, von einer kleinen Öffnungszahl im schwarzpapierernen Schirme ausgehend und allmählich zu einer größeren Zahl übergehend, die faserige Struktur sich bilden sieht aus dem Diffraktionsbilde für wenige Öffnungen, welch letzteres gänzlich der gewöhnlichen Theorie entspricht.

Mit weißem Lichte arbeitend, sieht man bei zwei Öffnungen eine kleine Anzahl von Beugungsstreifen, von denen die mittlere ungefärbt ist und durch den Punkt *O* geht, wo das

Bild der betrachteten Lichtquelle entsteht. Diesen Punkt werden wir das Zentrum nennen.

Zu beiden Seiten des mittleren und intensivsten Streifens sieht man eine kleine Anzahl abwechselnd heller und dunkler Streifen, welche die Spektralfarben aufweisen und nach der Außenseite zu immer schwächer werden und schließlich in einen gleichmäßig beleuchteten Grund übergehen. Das Streifensystem in der Mitte wollen wir *A* nennen, das gleichmäßig beleuchtete Feld zu seinen beiden Seiten *B*. Dies muß so aufgefaßt werden (vgl. § 3), daß dies alles superponiert ist auf die Beugungsfigur (Fleck und Ring) einer einzelnen Öffnung.

Mit drei Öffnungen, deren Verbindungslinien ein willkürliches Dreieck bilden, sieht man drei Streifensysteme *A* beziehungsweise senkrecht zu den Seiten dieses Dreieckes. Sie durchqueren einander in der Nähe des Mittelpunktes *O*. Bei vier oder mehr Öffnungen sieht man etwas Ähnliches, und so weiter.

Es macht den Eindruck, als ob stets Streifensysteme, jedes senkrecht zu der Verbindungslinie von zwei Öffnungen, welche Streifensysteme natürlich zunehmen mit der Öffnungszahl, einander im Mittelpunkte kreuzen. Dadurch sieht man in der Mitte keine deutlichen Streifen; hier bildet sich, was man eine „Sonnenblumenstruktur“ nennen könnte. Nach auswärts müssen die Streifensysteme divergieren. So kam ich zu der Vorstellung, daß dies die Fasern des v. Laueschen Phänomens sein würden. Wenn man mit fünfzig Öffnungen arbeitet, sieht das Bild genau so aus wie bei einer Glasplatte mit Lykopolium: nur ist im ersten Falle die Struktur grobfaseriger wie in dem zweiten. Nun kann es bei einer ziemlich kleinen Zahl von Öffnungen leicht vorkommen, auch wenn sie auf „zufällige“ Weise angebracht worden sind, daß unter allen Verbindungslinien einige Richtungen öfter auftreten wie die übrigen.

3. Die Auffassung, zu der ich in dieser Weise kam, kann mit einer einfachen mathematischen Betrachtung erläutert werden:

Vor dem Objektiv eines auf einen unendlich entfernten Lichtpunkt eingestellten Fernrohres ist ein Schirm aufgestellt, der eine große Anzahl *n* gleicher kreisförmiger Öffnungen trägt und der senkrecht steht zur Teleskopachse. *T* sei der

Hauptbrennpunkt des Objektivs, und wir betrachten die Lichtverteilung in der durch F gelegten lokalen Ebene V . Ein bekannter Satz der Beugungstheorie lautet: Die Intensität in einem Punkte P dieser fokalen Ebene kann dargestellt werden durch das Produkt von zwei Faktoren, deren einer die Intensität ist, welche eine der Öffnungen für sich geben würde, während der zweite die Intensität i ist, welche wir haben würden, wenn wir anstatt der gegebenen Öffnungen, in deren Mittelpunkten n gleiche Öffnungen waren, die so klein waren, daß sie als Punkte betrachtet werden konnten. Beide Faktoren sind Funktionen der Lage von P in V . Die erste bestimmt die Lichtverteilung im Beugungsbilde B für eine einzige Öffnung, eine Verteilung, in welcher die Intensität sich ziemlich langsam ändert von Punkt zu Punkt. In dieses Beugungsbild B bringt der Faktor i nun unregelmäßige Schwankungen, wobei die Intensität von Punkt zu Punkt schneller wechselt. Man sieht diese Schwankungen sozusagen auf dem durch B gebildeten Hintergrunde. Wenn helle und dunkle Fasern auftreten, so müssen diese in den Schwankungen des zweiten Faktors i ihren Ursprung finden. Deshalb werden wir uns auf die Betrachtung des Beugungsbildes von n punktförmigen Öffnungen beschränken.

4. P sei ein Punkt in der fokalen Ebene und die Schwingungen (monochromatisches Licht), durch die verschiedenen Öffnungen an dieser Stelle hervorgerufen, seien dargestellt durch

$$\cos (v t + \varphi_1), \cos (v t + \varphi_2) \dots \cos (v t + \varphi_n),$$

wo $\varphi_1, \dots \varphi_n$ die Phasen sind und wo die Amplitude einfachheitshalber gleich genommen worden ist. Man kann bekanntlich für die resultierende Intensität schreiben

$$(1) \quad i = n + \Sigma 2 \cos (\varphi_a - \varphi_b),$$

wofür man auch schreiben kann

$$(2) \quad i = n + \Sigma i_{ab}.$$

Die Summe muß genommen werden von allen Kombinationen von zwei Öffnungen.

Es stellt sich also heraus, daß man die Intensität bekommen kann durch Superponieren vieler Felder, und zwar einfach durch Summation ihrer Intensitäten.

Das erste Feld ist homogen n . Darauf sind zu superponieren $\frac{1}{2} n (n - 1)$ andere, jedes zu einem Paar Öffnungen gehörend. Deren eine Intensität ist

$$(3) \quad i_{ab} = 2 \cos (\varphi_a - \varphi_b),$$

welcher Wert zwischen $+2$ und -2 schwankt.

Die negativen Intensitäten in jedem der $\frac{1}{2} n (n - 1)$ „elementaren“ Felder machen keine Schwierigkeit. Denn die Intensität n des homogenen Feldes ist groß genug, um die negativen i_{ab} 's, sogar derer sehr viele aufzuheben. Hieraus geht hervor, daß der Ausdruck (1), der entstanden ist aus

$$(\Sigma \cos \varphi_a)^2 + (\Sigma \sin \varphi_a)^2$$

nie negativ sein kann.

In jedem elementaren Felde hat man ein Streifensystem, wie in § 2 besprochen. Man kann leicht zeigen, daß jede Linie (3) senkrecht zu der Verbindungslinie der Öffnungen a und b einen konstanten Wert hat. Von der einen Linie in der betrachteten Richtung bis zu der anderen wechselt i_{ab} . Auf der Linie durch den Mittelpunkt 0 ist $\varphi_a = \varphi_b$. $i_{ab} = 2$. Man hat äquidistante Maximum- und Minimumlinien $i_{ab} = +2$, $i_{ab} = -2$.

5. Das Folgende ist sehr bemerkenswert: Wenn man mit homogenem Lichte arbeitet, durchqueren die Maximum- und Minimumlinien das ganze Gesichtsfeld. Es ist zu erwarten, daß eine große Anzahl solcher Streifensysteme, welche einander in allen möglichen Richtungen durchkreuzen, eine körnige Struktur geben. Dies würde die körnige Struktur sein, welche nach den Betrachtungen von v. Laue bei homogenem Lichte auftreten muß.

Die Frage, um welche es sich hier handelt, ob nämlich die klassische Theorie die v. Laueschen Beobachtungen zu erklären imstande ist, würde man unmittelbar beantworten können, wenn der Versuch mit wirklich homogenem Lichte gemacht werden könnte. Was den zentralen Fleck betrifft, ist dies möglich; für den einen Ring jedoch liefert die geringe Intensität schon Schwierigkeiten.

Von den verschiedenen von mir angestellten Versuchen wählen wir die folgenden:

a. Zuerst wurde das Licht durch Wrattensche Filter einigermaßen monochromatisiert. Sowohl hier wie in den folgenden Versuchen wurden die drei verschiedenen Schirme benutzt, der eine mit den Öffnungen, die Glasplatte mit Lykopolium und die mit Quecksilber. Die faserige Struktur in der Mitte des zentralen Beugungsfleckes verschwand und änderte sich in eine körnige. Auf größerem Abstände vom Mittelpunkt blieben die Fasern im zentralen Flecke bestehen. Hierzu muß bemerkt werden, daß die Länge der einzelnen Fasern nicht proportional mit dem Radius wächst. Die Fasern in der Nähe der Peripherie sind verhältnismäßig viel länger wie die unweit vom Mittelpunkte.

b) Dann arbeitete ich mit einer Natriumlichtquelle. Jetzt wurde der ganze zentrale Fleck sehr schön körnig, auch an seiner Peripherie. Der erste Ring war nur ganz schwach sichtbar. Es ist schwierig, zu sagen, ob er etwas Radiales aufweist. Beim Aufleuchten der Lichtquelle sieht man ab und zu sehr deutlich einzelne Punkte auch in dem Ringe einen kurzen Augenblick hervortreten. Die Natriumflamme war die eines Bunsenbrenners, in den ein Löffel metallisches Natrium gebracht worden war. Obgleich starkes Licht und eine hohe Temperatur der Flamme ein sehr intensives Natriumlicht liefern können, wie es z. B. von du Bois¹⁾ beschrieben wurde, so sind diese vermieden worden. Dies geschah zur Erlangung einer größeren Monochromatie. Da also die Lichtquelle schwach war, wurden die Beobachtungen nicht mit einem Fernrohre, sondern mit dem bloßen Auge gemacht. Die Glasplatte war kurz vor dem Auge aufgestellt, das sich selbst auf die Lichtöffnung akkommodierte. Die Beobachtungen fanden statt in einem absolut dunklen Raume. Die Flamme befand sich in einem vollkommen abschließenden eisernen Kasten mit einem Abfuhrrohr zur Außenluft, während der Löffel mit Natrium durch ein in die Kastenwand passendes Zylinderchen in die Flamme geführt werden konnte, ohne daß, wie es sonst der Fall sein müßte, Licht durch mehr als eine einzelne feine Öffnung ausstrahlte.

6. Bei weißem Lichte sind die Erscheinungen ganz anders wie bei monochromatischem Lichte. Anstatt von (2) muß

1) H. du Bois, Zeitschr. f. Instrumentenk. p. 165. 1892.

man dann eine Summe ähnlicher Ausdrücke für die verschiedenen Farben nehmen, so daß man anstatt $i_{\sigma b}$ schreiben kann:

$$S i_{a b} .$$

Das Summierungszeichen bezieht sich auf die verschiedenen Farben. Die Intensitätsverteilung $S i_{a b}$ ist nun ein Streifensystem mit einer beschränkten Anzahl von Streifen, einem hellen Streifen in der Mitte und zu den beiden Seiten einen hellen und einen dunklen, auf einem Abstände $S i_{a b} = 0$; denn wo die eine Wellenlänge einen positiven Wert von $\cos(\varphi_a - \varphi_b)$ gibt, da gibt eine Wellenlänge, die nur wenig von der ersten abweicht und deshalb unserem Auge denselben Eindruck macht, einen negativen Wert. Bei weißem Lichte hat man also die Superposition eines uniformen Feldes und *schmaler* Streifensysteme, welche einander in der Nähe des Mittelpunktes durchkreuzen.

Hieraus kann man schließen: Wenn die klassische Theorie die von v. Laue untersuchten Erscheinungen zu erklären imstande ist, so sind *diese* Streifensysteme die von ihm beobachteten Fasern. Aber *ob* die Theorie die Erklärung geben kann, bleibt bis jetzt noch einigermaßen zweifelhaft. Man muß nämlich im Auge behalten, daß in jedem elementaren Streifensystem a, b die Intensität wechselt zwischen -2 und $+2$, während sie in dem homogenen Felde den viel größeren Wert n hat. Gibt es z. B. 10000 Körner, so werden bei der Superposition eines einzelnen Streifensystemes auf das homogene Feld Schwankungen von 10002—9998 auftreten, was natürlich unmerkbar sein würde.

Ein einziges Streifensystem ist also nicht sichtbar. Aber die Verbindungslinien von je zwei Öffnungen und deshalb auch die senkrecht zu diesen Linien stehenden Streifensysteme haben alle möglichen durch den Zufall bestimmten Richtungen. Streifen, welche auf dem Hintergrunde n sichtbar sind, können entstehen, wenn eine Anzahl von Streifensystemen zufälligerweise so wenig in der Richtung abweichen, daß auf nicht zu großem Abstände vom Mittelpunkt die Maxima $(+2)$ fast gänzlich mit denen des anderen zusammenfallen. Die Frage, ob die klassische Theorie das Phänomen erklären kann, kann also in folgender Weise formuliert werden:

I. Ist eine solche zufällige Zusammenhäufung von Streifensystemen in bestimmter Richtung nach den Wahrscheinlichkeitssätzen in genügendem Maße zu erwarten?

Die theoretische Erörterung dieser Frage werde ich beiseite lassen. Nur das Folgende möge bemerkt werden: In Wirklichkeit werden viele Streifensysteme herausfallen. Man arbeitet nämlich nicht mit einem leuchtenden Punkte, sondern mit einer Lichtquelle von gewisser Ausdehnung (Öffnung im Schirm). Jeder Punkt derselben gibt ein eigenes Beugungsbild, und zwar alle dasselbe, aber ein wenig übereinander verschoben. Dadurch werden die feineren Streifensysteme ausgewischt, und zwar verschwinden sie gänzlich, da $\cos(\varphi_a - \varphi_b)$ den Mittelwert Null hat. Da nun der Abstand der Streifen a, b umgekehrt proportional ist mit dem Abstände a, b , wird jedes Streifensystem verschwinden, das an zwei Öffnungen oder Körnern sichtbar wird, deren Abstand etwas groß ist. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob dieses Verschwinden einer Anzahl von Streifensystemen wohl die Sichtbarkeit erhöht.

7. Man kann die Erscheinungen auch in einer anderen Weise auffassen (obgleich natürlich äquivalent mit der obenstehenden). Man kann nämlich zuerst für eine Wellenlänge die resultierende Intensitätsverteilung berechnen und alle diese Resultate für die verschiedenen Wellenlängen superponieren (S_i). Man muß hier im Auge behalten, daß dieselbe Intensität, welche für eine bestimmte Wellenlänge λ in einem gewissen Punkte P auftritt, für eine andere Wellenlänge λ' im Punkte P' gefunden wird, der mit O und P auf einer geraden Linie liegt, so daß $OP : OP' = \lambda : \lambda'$.

Nun ist nach der klassischen Theorie die Intensitätsverteilung i für ein bestimmtes λ körnig. Geht λ in λ' über, so werden die hellen und dunklen Flecke in radialer Richtung verschoben. Wir werden dies die „spektrale Verschiebung“ nennen.

In dieser Weise werden sich natürlich bei dem Übergange von homogenem zu zusammengesetztem Lichte aus den Körnern Fasern bilden. Exner¹⁾ meinte, daß die beobachteten Fasern in dieser Weise gänzlich erklärt werden könnten.

1) F. M. Exner, Sitzungsber. Akad. Wien **76**, p. 522. 1877; Ann. d. Phys. **9**, p. 239. 1880.

v. Laue bezweifelte dies. Er bemerkte, daß in einem von seinen photographischen Bildern der Beugungsfigur einer Platte mit Lycopodium die Fasern in dem ersten Beugungsring länger sind, als aus der spektralen Verschiebung zu erklären wäre. (Vgl. auch § 5 Schluß.)

8. Meines Erachtens hat v. Laue hier übersehen, daß das Ineinanderfließen der hellen Flecke und ebenso der dunklen Streifen sich bilden kann, deren Länge größer ist als die Länge l , zu der jeder Fleck ausgedehnt wird.

Betrachten wir verschiedene von 0 ausgehende Linien. Wegen der zufälligen Verteilung der hellen und dunklen Flecke (eine Folge der zufälligen Verteilung der Lycopodiumkörner) werden auf dem einen Radius die dunklen Flecke einander etwas näher liegen wie auf dem anderen. Auf einem bestimmten Abstände vom Mittelpunkt wird man also auf dem einen Radius eine etwas mehr dunkle Linie sehen wie auf dem anderen. Dies würden die Fasern sein. Die Frage ist:

II. Genügt diese zufällige Prädisposition zum Ineinanderfließen, welche für einige Linien nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten ist (und welche nach den gewöhnlichen Gesetzen der Optik nur durch die unregelmäßige Verteilung der beugenden Teilchen hervorgerufen wird), um Fasern von der beobachteten Länge hervorzurufen?

Es ist klar, daß die Fragen I und II im Grunde auf dasselbe hinauskommen.

Nur wenn diese Fragen verneinend beantwortet werden müssen, so würde man den Schluß ziehen, daß die klassische Optik nicht imstande ist, die Beobachtungen zu erklären. Man müßte dann annehmen, daß entweder schon im homogenen Lichte radiale Fasern bestehen, was, wie oben schon bemerkt wurde, schwierig ist, direkt zu unterscheiden, und worauf die mit Natrium gemachten Versuche keinesfalls hinweisen, oder aber, daß längs einiger Radien, außer der oben erwähnten zufälligen Prädisposition noch eine *andere* besteht. Sowohl das eine wie das andere würde uns nötigen, die Fundamente der Beugungstheorie zu ändern.

Was das Ineinanderfließen der durch die spektrale Verschiebung entstandenen Fasern betrifft, so ist es klar, daß dies desto früher geschehen wird, je länger sie sind. Nun haben die durch die spektrale Verschiebung hervorgerufenen Fasern

eine Länge proportional dem Abstände zu dem Mittelpunkt 0; das Ineinanderfließen wird also auf einigem Abstände von 0 öfter stattfinden als in der Nähe dieses Punktes. Dies ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß, wie wir in § 5 sahen, die Länge der Fasern in der Nähe der Peripherie mehr zunimmt, als der Proportionalität mit dem Abstände zum Mittelpunkt entsprechen würde.

9. Schließlich werde ich noch einige Versuche beschreiben, welche (mitsamt dem Versuche mit dem Natriumlichte) meine Auffassung der Erscheinung stützen.

Bei der Beugungserscheinung von einem Schirme mit fünfzig Öffnungen ist es möglich, auf sehr direkte Weise zu zeigen, daß die Beugungsfigur in der Tat aus Interferenzstreifen aufgebaut ist. Um dies experimentell zu beweisen, war das Okular des Teleskopes auf einem Wägelchen befestigt, das auf einem Gleise schnell hin und her geschoben werden konnte. Es ist klar, daß bei einer Bewegung des Wägelchens die Struktur des in der fokalen Ebene des Teleskopes geformten Beugungsbildes in einer Richtung senkrecht zu der Bewegung ausgewischt wird. Wenn jedoch ein Interferenzbündel in der Bewegungsrichtung liegt, so wird dieses intakt bleiben.

In der Tat, wenn man das Okular in der angegebenen Weise schnell hin und her bewegt, so sieht man, daß 1. die faserige Struktur des Beugungsbildes übergeht in einen homogenen Fleck, auf dem sich 2. in der Richtung der Bewegung sehr schön ein Interferenzbündel abzeichnet.

Bewegt man das Okular auf willkürliche Weise, doch so, daß es stets scharf auf den Lichtpunkt des bleiernen Schirmes eingestellt bleibt, so sieht man auf einem homogen beleuchteten Hintergrunde radiale Interferenzbündel rotieren.

Dieser Versuch gelingt nicht mehr mit einem Schirme mit einer sehr großen Anzahl von Öffnungen. Wahrscheinlich ist die Ursache hiervon, daß bei einer sehr großen Öffnungszahl die Anzahl der Interferenzbündel, welche ein und dieselbe Richtung hat, sehr groß ist. Der Abstand der Lichtmaxima in diesen Bündeln ist im allgemeinen sehr verschieden. Man wird deshalb bei der Superposition nur den zentralen Streifen behalten, und ein ganzes Bündel Interferenzstreifen in der Bewegungsrichtung wird nicht beobachtet werden.

Der zweite zu beschreibende Versuch rührt von Prof.

H. A. Lorentz her. Der ihm zugrunde liegende Gedankengang war der folgende: Wenn bei Benutzung von rein monochromatischem Lichte die ungleiche Verteilung des Lichtes granular ist, so wird der faserige Charakter des Beugungsbildes durch die spektrale Verschiebung der Körner vom Violett zum Rot entstehen. Aber wenn nun wirklich die spektrale Verschiebung, die die Natur der Erscheinung mit sich bringt, die einzige Ursache des Entstehens der Fasern ist, so muß offenbar eine zweite künstlich hervorgerufene spektrale Verschiebung der Körner bewirken, daß die Fasern nicht länger radial gerichtet sind. Es gelingt in der Tat, die Fasern auch in anderer als radialer Richtung hervorzurufen. Wenn man vor dem Objektiv des Teleskopes, zwischen dieser Linse und der beugenden Platte ein Prisma aufstellt¹⁾, dann werden alle Beugungsbilder vom Violett zum Rot in einer bestimmten Richtung verschoben, und zwar das rote Bild am meisten. Anstatt des Lichtpunktes in der Mitte der runden Beugungsfigur, der das Bild ist der Öffnung in dem bleiernen Schirme, entsteht nun ein Lichtstreifen AB , am einen Ende A rot und am anderen Ende B violett gefärbt. Betrachtet man die nun entstandene verzerrte Beugungsfigur, und zwar auf der Fortsetzung von AB auf die Seite von B , so wird man an einen Punkt P kommen, wo die ursprüngliche, für die Beugungsfigur charakteristische, spektrale Verschiebung aufgehoben wird durch die superponierte, durch das Prisma hervorgerufene spektrale Verschiebung. In der Nähe dieses Punktes muß die Struktur granulär sein, während die neu gebildeten Fasern auf größeren Abstand von diesem Punkte nach demselben gerichtet sein müssen. Und nun gelingt es wirklich ganz leicht, diese Erscheinungen wahrzunehmen.

Auch dieser Versuch liefert also einen Beweis dafür, daß die Fasern in der spektralen Verschiebung ihre Ursache finden. Man sieht sie am besten, wenn man vor das Auge einen Wrattenschen Filter hält. Mit einer solchen Glasplatte, die vor dem linienförmigen Spektrum AB nur einen Teil im grünen zur Länge von ca. $\frac{1}{6} AB$ durchließ, wurde in der unmittelbaren Nähe des Punktes P eine körnige Struktur wahrgenommen, gänzlich von derselben Art wie die, welche unter

1) Man kann auch ein kleines Prisma zwischen das Okular und das Auge halten.

gewöhnlichen Umständen in der Nähe des Punktes O gesehen wurde. In größerem Abstände von P sah man Streifen radial zu P gerichtet; die Länge dieser Streifen war desto größer, je weiter man von P entfernt war. Die nebenstehende Figur kann die Sache weiter erläutern.

CC' sei der durch den Filter hindurchgehende Teil des linearen Spektrums AB . Wir wollen die beiden extremen durchgelassenen Farben betrachten, für

welche das Bild in C und C' fällt, welche Farben wir mit C und C' andeuten können. λ und λ' seien ihre Wellenlängen, so daß, da A das rote Ende von AB ist,

$\lambda > \lambda'$ ist.



Wir sehen zum Beispiel, mit der Farbe C allein arbeitend, ein helles Körnchen im Punkte Q . Dann würde, wenn nur das Licht C' benutzt wurde, der korrespondierende helle Fleck im Punkte Q' gesehen werden, der gefunden wird, indem man $C'Q'$ parallel zu CQ zieht und die Länge von $C'Q'$ bestimmt durch die Proportionalität

$$CQ : C'Q' = \lambda : \lambda'.$$

Für zwischenliegende Farben werden die Lichtflecke zwischen Q und Q' fallen, und zwar, wie man leicht sieht, wenn die Länge CC' ziemlich klein ist, auf der kurzen geraden Strecke QQ' . Die Fortsetzung hiervon schneidet die von AB im Punkte P , wovon die Lage bestimmt wird durch die Gleichung

$$(4) \quad CP : C'P' = \lambda : \lambda'.$$

Hieraus geht hervor, daß die Lage von P unabhängig davon ist, um welches Lichtstreifen QQ' es sich handelt. Weiter stellt es sich heraus, daß, wenn RR' ein zweites Lichtstreifen ist, die Längen QQ' und RR' sich verhalten wie die Abstände $Q'P$ und $R'P$.

Ganz in der Nähe von P waren die Linien so kurz, daß kein Unterschied mit den Körnern wahrgenommen werden konnte, und wenn die Farbe C gerade in P ein Lichtfleckchen gab, so würde das korrespondierende Lichtfleckchen für die Farbe C' damit zusammenfallen, wie aus (4) folgt. Natürlich folgt aus dem Auftreten eines Lichtfleckchens in P , daß man ohne Prisma im korrespondierenden Punkte des Bildes ein kurze, radial gerichtete Linie von der Länge CC' sehen würde.

Es möge speziell bemerkt werden, daß das Fehlen von Fasern in der unmittelbaren Nähe von P beweist, daß mit homogenem Lichte keine Fasern wahrgenommen werden und daß die, welche man mit nicht-homogenem Lichte wahrnimmt, durch die in § 7 erwähnte spektrale Verschiebung verursacht werden. Es ist nämlich deutlich, daß, wenn man schon mit homogenem Lichte in der Nähe von P ein längs CP gerichtetes Streifchen CP hat, dies nie durch das Prisma zu einem Punkte gemacht werden kann.

Schließlich muß das Folgende bemerkt werden. Daß in dem Versuche mit dem Prisma die Fasern „radial“ gerichtet sind nach P hin, gilt nur bei nicht zu großen Abständen von P . In Wirklichkeit verlaufen die Linien, über welche die Fasern fallen, ungefähr wie in der Figur durch L, L' angedeutet worden ist. Um dies zu erklären, müßten wir hier zu sehr auf Details eingehen.

(Eingegangen 1. August 1918.)

1918.

No. 24.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

GENERAL LIBRARY
MAY 1 1919
UNIV. OF MICH.

BEGÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 57. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 362. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.
DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
Ausgegeben am 10. Januar 1919.*

Inhalt.

	Seite
1. Ragnar Lundblad. Zur Theorie des Opaleszenzlichtes . . .	581
2. Edgar Meyer. Nachtrag zur Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität“ von R. Bär	628
Namenregister zum Jahrgang 1918	629

Zur Beachtung.

Zu dem Aufsatz Professor Dr. Stenström: „Experimentelle Untersuchungen der Röntgenspektren“, enthalten in Nr. 21 der „Annalen der Physik“, gehört eine Tafel, die bis zur Ausgabe des Heftes nicht mehr rechtzeitig fertiggestellt werden konnte und die daher nachträglich diesem Heft Nr. 24 beigegeben wird.

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Leipzig, im Dezember 1918.

An die Abonnenten der Annalen der Physik.

Die fortwährend gestiegenen Herstellungskosten haben die Verlagsbuchhandlung genötigt gehabt, in letzter Zeit den Umfang der

„Annalen der Physik“

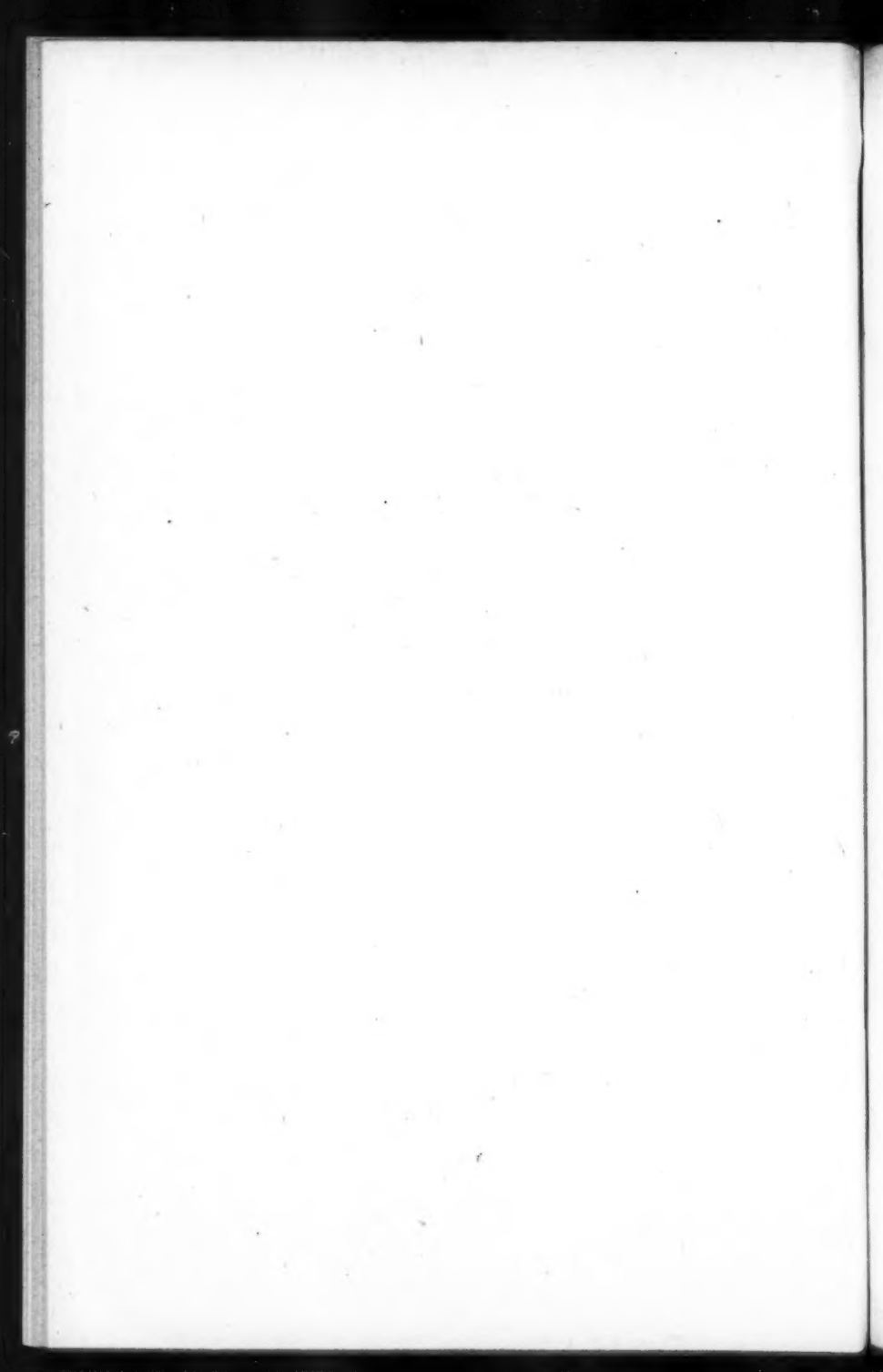
gegen früher einzuschränken und es war nur dadurch möglich, den bisherigen Bezugspreis bestehen zu lassen.

Die Verringerung des Umfangs hielt ungefähr gleichen Schritt mit dem geringeren Eingang von Manuskripten; jetzt fängt aber die wissenschaftliche Welt wieder an, sich in stärkerer Weise zu betätigen, wodurch auch der Zufluß von Manuskripten für die „Annalen der Physik“ einen erfreulichen Aufschwung genommen hat. — Leider tritt aber keine Verringerung der Herstellungskosten ein, im Gegenteil, durch die Neuordnung der Verhältnisse ist damit zu rechnen, daß die Herstellungskosten noch weitere Steigerungen erfahren werden. Um nun dem größeren Zufluß an Arbeiten Folge geben zu können, wird vom 1. Januar 1919 ab der Umfang wieder größer werden gegen beispielsweise das Jahr 1918, dafür aber wird auch ein erhöhter Bezugspreis angesetzt werden müssen, der für den Jahrgang von 24 Heften in Übereinstimmung mit dem Kuratorium der „Annalen der Physik“ zunächst auf M. 66.— festgesetzt worden ist, das macht für den Band von 8 Heften M. 22.—.

Es ist in Aussicht genommen, die neuen Preise wieder herabzusetzen, oder den Umfang noch mehr bei dem gleichen Preise zu verstärken, sobald eine Verringerung der Herstellungspreise dies zuläßt.

075

Die Verlagsbuchhandlung von Johann Ambrosius Barth.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 57.

1. Zur Theorie des Opaleszenzlichtes; von Ragnar Lundblad.

Die Frage, wie die Extinktion des Lichtes in Gasen zustande kommt, ist bereits öfters von verschiedenen Standpunkten aus behandelt worden, ohne daß sich eine allgemein angenommene Anschauung ergeben hätte. Die experimentellen Beiträge zur Diskussion sind sehr spärlich geblieben, wie es ganz natürlich ist in einem Falle, wo eigentliche Laboratoriumsversuche ausgeschlossen sind wegen der Geringfügigkeit des zu beobachtenden Effektes in experimentell herstellbaren Gasschichten. Die Forschung ist bis jetzt hauptsächlich auf die Extinktion in den langen Schichten der irdischen Atmosphäre beschränkt gewesen. Die Zusammensetzung der atmosphärischen Schichten ist aber unserer Beeinflussung entzogen, und die Bemühungen der Wissenschaft sind darum kaum weiter gedungen als bis zur ziemlich rohen Bestätigung der bekannten Rayleighschen Gesetze der Extinktion und des Polarisationszustandes des zerstreuten Lichtes. Was sich aber hinter der Rayleighschen Formel

$$h = \frac{32 \pi^3 (n - 1)^2}{3 N \lambda^4}$$

verbirgt, ist stets eine theoretische Frage geblieben, und die Theorie hat während der letzten zwei Jahrzehnte schon mehrere verschiedene Antworten versucht.

Als diese Formel zum ersten Male in ihrer obigen Gestalt abgeleitet wurde¹⁾, erfolgte dies unter der Voraussetzung, daß die Extinktion durch die Anwesenheit kleiner dielektrischer Kugeln im Medium verursacht würde. N wäre dann die Anzahl der Kugeln in der Volumeinheit und n der Brechungs-exponent des durch die eingebetteten Teilchen modifizierten Mediums. Die Ableitung schloss sich also nahe an diejenigen Vorstellungen an, welche die früheren Theorien desselben

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 375. 1899.

Verfassers begründeten und welche die Extinktion in der Atmosphäre durch deren Staubgehalt erklären wollten.

Schon in der angeführten Abhandlung sprach indessen Lord Rayleigh einen neuen Gedanken aus, der bald die älteren Vorstellungen in der allgemeinen Auffassung ablöste. Er fragte sich, ob nicht schon die Gasmoleküle selber eine Inhomogenität des Mediums involvieren müßten, die sich in einer Extinktion kundgäbe. Das Resultat konnte er folgendermaßen zusammenfassen: „We may conclude that the light scattered from the molecules would suffice to give us a blue sky, not so very greatly darker than that actually enjoyed.“ Die Extinktion durch den Staub wurde also mit einer Extinktion durch die einzelnen Moleküle ersetzt.

Für die drei Jahre jüngere Theorie von Planck¹⁾ wurde diese Auffassung vom Ursprung der Extinktion maßgebend. Auch Planck sucht die Ursache der Extinktion in der Wirkung der einzelnen Moleküle und schließt dabei ausdrücklich jegliche Inhomogenität in Gebieten, die groß sind gegen die molekularen Entfernungen, aus. Was er in erster Linie beabsichtigt, ist, den inneren Mechanismus ausfindig zu machen, und er zieht zu diesem Zwecke seine frühere Theorie über die Strahlungsdämpfung von Resonatoren heran. Die Gleichung des schwingenden Dipols ist nach Planck²⁾

$$Kf + Lf'' - \frac{2}{3c^3}f''' = Z_0',$$

wo f das elektrische Moment des Dipols, Z_0' die erregende Feldstärke und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet und K und L Konstanten sind. Das dritte Glied dieser Gleichung ergibt gerade die Dämpfung durch Strahlung, und demnach ist immer dieses Glied als das Charakteristische der Planckschen Theorie angesehen worden.

Diese Theorie ist jedoch nicht Einwänden seitens einiger Forscher entgangen. Zuerst wandte sich Mandelstam³⁾ in einer Reihe von Aufsätzen, dann auch Oseen⁴⁾ dagegen. Was ihnen bedenklich erschien, war gerade das Glied $-\frac{2}{3c^3}f'''$.

1) M. Planck, Berl. Ber. 1902. p. 470; 1904. p. 740.

2) M. Planck, Wied. Ann. 60. p. 591. 1897.

3) L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 23. p. 626. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 608. 1907; 9. p. 308 u. 641. 1908.

4) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. p. 341. 1916.

Sie wollten zeigen, daß die genauere Durchrechnung an der rechten Seite ein ebenso großes Glied erscheinen ließe und daß infolgedessen die Extinktion im Falle optisch homogener Substanzen in Fortfall käme. Gans und Happel¹⁾ sowie Lorentz²⁾ glaubten dagegen, an dem angefochtenen Gliede noch festhalten zu müssen, wenn es sich um ein Gas handelte. Die von Mandelstam angeführten Gründe seien nur für die Kristalle überzeugend, wo die Moleküle geordnet sind; aber für die Gase, wo jedes Molekül sich nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen bewegt und die Moleküle folglich völlig unregelmäßig verteilt sind, sei der Beweis nicht stichhaltig. Hier treten uns also *die statistischen Eigenschaften der Gase* als entscheidender Grund entgegen. Aber nur *dadurch*, daß sie dem Strahlungsgliede den Eintritt in die Schwingungsgleichung ermöglichen.

Daß die statistischen Eigenschaften beobachtbaren Einfluß auf die Opaleszenzstrahlung ausüben müssen, war bereits ein paar Jahre vorher von Smoluchowski³⁾ ausgesprochen. Die Vorstellungen über den Mechanismus aber waren bei ihm gänzlich andersartig. Denn er untersuchte die statistischen *Dichteschwankungen*, die sich *in endlichen Volumelementen* eines Gases abspielen, am auffallendsten in der Nähe des kritischen Punktes, und folgerte, daß sie eine „Körnigkeit“ der Struktur bildeten, welche Opaleszenz erregen mußte, und zwar aus denselben Gründen, wie sie Lord Rayleigh für seine erste nichtmolekulare Theorie entwickelt hatte.

Daß auch die Dichteschwankungen gerade zur Rayleighschen Formel führen, wurde etwas später von Einstein⁴⁾ an der Hand der Maxwell'schen Mediumdynamik streng bewiesen. Ein etwas einfacherer, aber nicht völlig strenger Beweis ist auf denselben Grundlagen von Lorentz⁵⁾ geliefert.

Diese beiden Quellen der Opaleszenzstrahlung, die molekulare Dämpfungsstrahlung und die Opaleszenzstrahlung der groben Dichteschwankungen, sind sie nun im Grunde eine und

1) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**, p. 291. 1909.

2) H. A. Lorentz, Proc. Amsterd. **13**, p. 92. 1910.

3) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, p. 205. 1908.

4) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, p. 1275. 1910.

5) H. A. Lorentz, Les Théories statistiques en Thermodynamique, p. 86. Leipzig, B. G. Teubner. 1916.

dieselbe, oder stellen sie zwei verschiedene Erscheinungen dar? Smoluchowski scheint geneigt zu sein, die Frage in letzterem Sinne zu beantworten. Nachdem er für Luft im Normalzustande einen Extinktionskoeffizienten vom Betrage $h = 3 \cdot 10^{-8}$ aus den Dichteschwankungen berechnet hat, schreibt er¹⁾: „Nach Lord Rayleigh ist die Luft ein trübes Medium, dessen Teilchen T die Luftmoleküle selbst sind, und daraus erklärt sich die blaue Farbe des Himmels und die Lichtabsorption in der Erdatmosphäre. Rayleighs Berechnung ergibt für h (unter Annahme $N = 4 \cdot 10^{19}$) den Wert $7 \cdot 10^{-8}$. Obige Rechnung würde also beweisen, daß auch die lokalen Dichteunterschiede dabei in merklicher Weise mitspielen.“

Das Verdienst, diese Frage zu einem aktuellen Probleme gemacht zu haben, gebührt jedoch Oseen²⁾, indem er die Extinktion in einen Rayleigh-Planckschen und einen Keesom-Einsteinschen Teil zerlegte, welche beide jeder für sich eine Extinktion vom Rayleighschen Betrage bewirken sollten, im ganzen also

$$h = 2 \cdot \frac{32 \pi^3 (n - 1)^2}{3 N \lambda^4}.$$

Da dieses Ergebnis gewiß mit den Erfahrungen unverträglich ist, folgert er ganz richtig, daß in den Theorien irgendwo ein Fehler stecken müsse, sei es, daß schon die Maxwell'schen Gleichungen fehlerhaft seien oder daß die Strahlungsdämpfung der Planckschen Dipole wegfallen solle.

Um diesen Problemen gerecht zu werden, scheint es mir unumgänglich zu sein, die beiden Ursachen der Extinktion von molekularen Gesichtspunkten aus zu untersuchen. Unsere Kenntnisse über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Medien sind in den letzten Jahren durch Arbeiten von Sommerfeld³⁾, Esmarch⁴⁾, Nathanson⁵⁾ u. a. erheblich vertieft worden. Die Ergebnisse der neuen Betrachtungsweise hinsichtlich der Extinktion zu ermitteln, ist

1) M. v. Smoluchowski, l. c. p. 217.

2) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. p. 233. 1916.

3) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 8. p. 841. 1907.

4) W. Esmarch, Ann. d. Phys. 42. p. 1257. 1913.

5) L. Nathanson, S.-A. Krak. Anz. (Bull. intern.) A. 1914. p. 335 und 29 S. Beibl. 38. p. 1083. 1914.

das Ziel dieses Aufsatzes. Möglicherweise sind einige diesbezügliche Resultate zuvor von Nathanson erkannt; seine Arbeit war mir jedoch des Krieges halber noch nicht zugänglich.

§ 1. Definition des Dichtezustandes.

Wir wollen uns im folgenden auf Gase beschränken, schließen also von vornherein aus unseren Überlegungen die Trübungen in Flüssigkeiten nahe am kritischen Punkte und in Lösungen am Entmischungspunkte aus. Das Gas wollen wir ein beliebiges Volumen ausfüllend denken, schneiden aber durch die auf irgendein Koordinatensystem bezüglichen Bedingungen

$$0 < x < L,$$

$$0 < y < L,$$

$$0 < z < L$$

einen Würfel aus, wo wir die physikalischen Verhältnisse ins Auge fassen wollen.

Die mittlere Dichte ϱ_0 soll im Würfel überall dieselbe sein. Wegen den Molekularbewegungen schwankt jedoch die Dichte in jedem Raumelemente um jenen Wert, so daß sie in einem bestimmten Augenblicke nicht ϱ_0 , sondern $\varrho = \varrho_0(1 + \delta)$ beträgt, wo δ eine kleine bald positive, bald negative Zahl ist.

Um unsere Aufgabe mathematisch formulieren zu können, müssen wir noch von der Dichte in einem Punkte (x, y, z) sprechen. Damit soll einfach die mittlere Dichte gemeint werden in einem Raumelemente, z. B. einer Kugel, die um den Punkt gelegt wird, und die möglichst klein gewählt werden soll, aber dennoch so groß, daß sie eine große Anzahl Moleküle umfaßt.

Die Dichteverteilung wird natürlich eine sehr verwickelte Funktion der Koordinaten sein, ist aber immer durch eine dreidimensionale Fourierreihe darstellbar. Wir setzen demgemäß

$$(1) \quad \varrho = \varrho_0(1 + \delta) = \varrho_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right),$$

wo m , n und p jedes für sich die Reihe der negativen und positiven ganzen Zahlen durchlaufen sollen und die Koeffizienten B nur vom absoluten Betrage der Parameter m , n und p , nicht von ihrem Zeichen abhängig sind.

Damit die Dichteverteilung im phänomenologischen Sinne völlig bestimmt sein mag, müssen noch die statistischen Gesetze ermittelt werden, welche die Größenverteilung der Koeffizienten B regeln. Diese Gesetze können, wie es Einstein¹⁾ gezeigt hat, aus den thermodynamischen Eigenschaften des Gases mittels des Boltzmannschen Prinzips gefunden werden. S sei die Entropie eines Zustandes von der statistischen Wahrscheinlichkeit W , R die Gaskonstante und N' die Zahl der Moleküle in einem Grammolekül. (Wir reservieren die Bezeichnung N für die Molekülzahl in einem Kubikzentimeter.) Dann schreibt sich dieses Prinzip:

$$S = \frac{R}{N'} \lg W + \text{konst.}$$

Die Konstante legen wir durch die Bedingung fest, daß W für das Entropiemaximum von der Größenordnung Eins sein muß, setzen mithin

$$(2) \quad W = e^{\frac{N'}{R} (S - S_0)},$$

wo S_0 die größtmögliche Entropie des Systems ist. Streng genommen wäre hier noch ein Faktor von der Größenordnung Eins beizugeben, weil W auch für das Entropiemaximum natürlich doch nicht genau Eins beträgt. Da wir jedoch nur die verhältnismäßige Wahrscheinlichkeit verschiedener Zustände brauchen, können wir ihn ohne Gefahr unterdrücken.

Die Entropie unseres Systems beruht auf den jedesmaligen Werten der Parameter B , und wir nehmen an, daß jene Abhängigkeit ermittelt ist, so daß S als Funktion der B bekannt ist. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, ordnen wir ferner einstweilen die B in einer beliebigen Reihe $B_1, B_2, \dots B_n$. Dann ist nach (2) die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Gebiete zwischen B_1 und $B_1 + dB_1, B_2$ und $B_2 + dB_2$ usw. befindet:

$$dW = e^{\frac{N'}{R} (S - S_0)} dB_1 dB_2 \dots dB_n.$$

Halten wir alle B bis auf eines, z. B. B_1 , innerhalb der angegebenen Grenzen fest und fragen nach der relativen Wahrscheinlichkeit der Werte von B_1 , so wird demgemäß die Antwort offenbar in einer analogen Gleichung

1) A. Einstein, l. c.

$$(3) \quad dW = e^{\frac{N'}{k}(S(B_i) - S(0))} dB_i$$

enthalten sein, wo wieder ein konstanter Faktor unterdrückt ist.

Wir wollen zunächst die Funktion $S(B_i)$ bestimmen. Eine jede Entropieänderung dS ist mit der begleitenden Energieänderung dU des Systems und der Arbeit dA , die man von außen beizubringen hat, um die elementare Veränderung durch äußere Einwirkung zu bewirken, durch die bekannte Gleichung

$$dS = \frac{dU - dA}{T}$$

verbunden. Der Energiegehalt unseres Systems ist aber vom Schwankungsprozesse unabhängig, somit $dU = 0$. Desgleichen sind die Temperaturschwankungen von den Dichteschwankungen unabhängig, so daß man für T die Temperatur des thermodynamischen Gleichgewichtes einsetzen darf. Die gesamte Entropieänderung, während B_i von Null bis auf seinen zufälligen Wert wächst, kann mithin durch einfache Integration gefunden werden:

$$S(B_i) - S(0) = -\frac{A}{T},$$

wo A die dem ganzen Systeme während des ganzen Vorganges zuzuführende Arbeit ist.

Die von der Masseneinheit eines Gases bei einer Dichteänderung $d\rho$ geleistete Arbeit ist

$$-\frac{p d\rho}{\rho^2} = -\frac{RT}{M} \cdot \frac{d\rho}{\rho}$$

und folglich, wenn ρ' die Dichte in einem Punkte für $B_i = 0$ bedeutet,

$$(4) \quad S(B_i) - S(0) = \frac{R}{M} \int \frac{d\rho}{\rho} \cdot \rho' dx dy dz,$$

wo das Integral in bezug auf ρ von ρ' bis zu der durch B_i bestimmten Dichte, in bezug auf die Koordinaten über den ganzen Würfel zu erstrecken ist.

Die Größe ρ' geht aus (1) hervor, falls man die mit B_i multiplizierten Glieder aus der Summation ausschließt. Wenn man diese Glieder in ein trigonometrisches Produkt zusammenfaßt und die Bezeichnung mit drei Indizes wieder einführt, läßt sich (1) schreiben

$$\varrho = \varrho' + 8 \varrho_0 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L},$$

wo m' , n' und p' diejenigen Indizes sind, die B_i charakterisieren. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (4) wird erhalten

$$S(B_i) - S(0)$$

$$= \frac{R}{M} \int \frac{8 \varrho_0 d B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L}}{\varrho' + 8 \varrho_0 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \cos \frac{\pi p' z}{L}} \cdot \varrho' dx dy dz.$$

Im Nenner ist das zweite Glied gegen das erste sehr klein. Wenn wir uns mit den zweiten Potenzen in B begnügen, können wir deshalb setzen

$$\begin{aligned} S(B_i) - S(0) &= \frac{R}{M} \cdot 8 \varrho_0 \int d B_{m' n' p'} dx dy dz \cos \frac{\pi m' x}{L} \cos \frac{\pi n' y}{L} \\ &\quad \cos \frac{\pi p' z}{L} \left[1 - 8 B_{m' n' p'} \cos \frac{\pi m' x}{L} \cdot \cos \frac{\pi n' y}{L} \cdot \cos \frac{\pi p' z}{L} \right] \\ &= - \frac{R}{M} \cdot 8 \varrho_0 \cdot \frac{L^3 B_{m' n' p'}^2}{2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3) bekommen wir endlich das Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = e^{-\frac{4 N' \varrho_0 L^3}{M} \cdot B_{m' n' p'}^2} d B_{m' n' p'},$$

oder wenn wir noch anstatt N' die Anzahl N der Moleküle in 1 cm^3 des Gases einführen

$$(5) \quad dW = e^{-\frac{4 N L^3}{M} B_{m' n' p'}^2} d B_{m' n' p'}.$$

Dieses Verteilungsgesetz, das die statistische Definition des Dichtezustandes abgibt, ist dem Gauss'schen Fehlergesetze analog. Positive und negative Abweichungen sind ebenso wahrscheinlich, d. h. wir mitteln

$$\overline{B_{m n p}} = 0,$$

während das mittlere Quadrat gegeben ist durch die Gleichung

$$(6) \quad \overline{B_{m n p}^2} = \frac{1}{8 N L^3},$$

und die mittlere vierte Potenz durch die Gleichung

$$(6a) \quad \overline{B_{m n p}^4} = \frac{3}{64 N^2 L^6}$$

§ 2. Über die Eigenschaften der molekularen Resonatoren.

Die historische Einleitung, welche diesem Aufsätze vorausgeschickt wurde, mag wohl gezeigt haben, wie wenig wir zurzeit von einer abgeschlossenen Extinktionstheorie sprechen dürfen, wie weit die Theorie noch von ihrer endgültigen Vollendung entfernt ist. Diese Sachlage kann nicht ohne Einfluß auf unsere Darstellung bleiben. Sie bewirkt, daß die Aufgabe, eine möglichst umfassende Theorie zu schaffen, gegenüber derjenigen, eine einfachere, aber durchsichtigere zu gestalten, zurücktreten muß.

Deswegen nehmen wir an, daß die Gasmoleküle alle *derselben Art* sind und daß sie in optischer Hinsicht durch die Schwingungen *eines einzigen, isotrop gebundenen Elektrons* erschöpfend gekennzeichnet sind. Als Molekularresonatoren betrachtet, seien sie durch ihre Frequenz ω_0 im ungedämpften Zustande und durch ihre Dämpfung bestimmt. Außer der Strahlung nehmen wir dabei noch eine dissipative Kraft an. Die Schwingungsgleichung des Resonators wird demnach

$$(7) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + g \frac{dp}{dt} + \omega_0^2 p - \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d^3 p}{dt^3} = \frac{e^2}{m} \mathfrak{E},$$

wo p das elektrische Moment des Dipols, m die Masse und e die Ladung des Elektrons bedeutet, g eine Konstante ist und endlich \mathfrak{E} für die erregende elektrische Kraft steht.

§ 3. Über die erregende Kraft.

Die erregende elektrische Kraft fassen wir als die Summe von der einfallenden Welle und den Zustrahlungen aller übrigen Resonatoren des Systems auf. Das heißt, wir setzen

$$(8) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \sum_M \text{rot}_M \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

Hier bezeichnet der Index M' , daß die rot am Orte des soeben betrachteten Moleküls M' zu vollführen sind. Die Summation ist über sämtliche Moleküle M , nur M' ausgenommen, auszuführen. Der Abstand zwischen den Molekülen M' und M ist mit r bezeichnet. Endlich bedeutet \mathfrak{E}_0 die Außenwelle und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Der obige Ansatz (8) schließt noch eine wichtige Voraussetzung ein, und zwar, daß die *Maxwellschen Gleichungen* in

den intermolekularen Zwischenräumen gültig seien. Um dessen gewiß zu sein, macht Planck¹⁾ die Einschränkung, daß der Abstand zweier benachbarter Moleküle groß sei gegen die Lineardimensionen eines Moleküls. Ich glaube, daß es besser ist, die Voraussetzung in ihrer obigen Gestalt beizubehalten. Denn selbst die Plancksche Annahme wird uns gegenwärtig nicht mehr unbedingt von den theoretischen Bedenken gegenüber den Maxwell'schen Gleichungen befreien. Hat doch Oseen²⁾ gezeigt, daß insofern das Atom nach dem Bohrschen Modelle konstruiert ist, die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen innerhalb einer umschließenden Kugel vom Radius 10^{-4} cm suspendiert ist, und daß also jene vielfach benutzte Annahme über die innere Bauart mit einer Verwendung der Maxwell'schen Gleichungen in Gasen bei gewöhnlichem Drucke nicht zu vereinen sei. Vom theoretischen Standpunkte aus wird man mithin zunächst die Hinlänglichkeit der Einschränkung von Planck bezweifeln. Vom experimentellen Standpunkte aus muß man andererseits ihre Notwendigkeit anzweifeln. Denn die Erfahrung hat die Lorentzsche Elektronentheorie als sehr geeignet erwiesen, die wirklich beobachteten optischen Erscheinungen auch bei sehr großen Dichten darzustellen. Indem wir uns in bezug auf die Benutzung der klassischen Elektrodynamik sowie betreffs der Eigenschaften der molekularen Resonatoren bzw. deren Schwingungsgleichung auf die Basis der Lorentz'schen Theorie stellen, mögen wir darum von vornherein einen Gültigkeitsbereich unserer Theorie erwarten, welcher, insofern wir die Rechnungen genau durchzuführen vermögen, betreffs der erlaubten Lagerungsdichte der Teilchen wahrscheinlich mit der Lorentz'schen zusammenfallen wird.

Das erste Glied im Ausdrucke für die erregende Kraft ist die einfallende Welle. Nach diesem Ansatz würde also diese Welle nach den im Vakuum herrschenden Gesetzen auch in den ponderablen Körper eindringen. Aber von einer solchen Welle spüren wir in der Tat nichts. Statt deren breitet sich vom Rande des Mediums eine andere Welle aus, deren Phasengeschwindigkeit im allgemeinen von der Geschwindigkeit im

1) M. Planck, l. c. p. 476.

2) C. W. Oseen, *Physik. Zeitschr.* 16. p. 395. 1915.

Vakuum verschieden ist. Das ist nur so zu erklären, daß die Strahlung der molekularen Resonatoren einen Bestandteil enthält, der die einfallende Welle auslöscht, und dazu noch einen, der als eine im Medium mit der Phasengeschwindigkeit fortschreitende Welle zum Vorschein kommt.

Diese Betrachtungsart hat sich in den letzten Jahren immer bewußter durchgearbeitet. Einige hierher gehörige Vorstellungen verspürt man bereits in einer im Jahre 1905 erschienenen Arbeit von v. Laue.¹⁾ Genauer werden sie von Esmarch²⁾ in seiner wichtigen Abhandlung über die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in ponderablen Körpern entwickelt. Er untersucht die Veränderungen der Primärwelle beim Durchgang durch die nächste Resonatorenschicht wegen der dort erregten Strahlung und zeigt, daß sie sich in einer von der Signalgeschwindigkeit abweichenden Phasengeschwindigkeit äußern. Beim Integrieren findet er sodann für die durchgehende Welle eine Formel, die ein Glied enthält, das gerade die einfallende Welle aufhebt.

Das wichtige Ergebnis, welches in dieser Entdeckung steckt, ist wohl am klarsten von Oseen³⁾ ausgesprochen. Er hat auch eine sehr glückliche mathematische Methode zur Trennung der beiden Bestandteile der Resonatorstrahlungen ausgearbeitet, deren wir uns im folgenden bedienen wollen.

Diese Methode⁴⁾ sowie die ursprüngliche Esmarchsche setzt jedoch voraus, daß die Resonatoren so dicht gelagert sind, daß man das Summieren über alle Resonatoren durch ein Integrieren über alle Volumenelemente ersetzen darf, und dies konstituiert eine neue Annahme, die auch für uns unvermeidlich ist, daß die Moleküllagerung eine so dichte ist, daß die molekulare Diskontinuität dabei ohne Einfluß ist, oder doch die augenblicklichen Abweichungen beim Mitteln über die kleinsten für Beobachtungen ausreichenden Zeitintervalle sich aufheben. Freilich werden wir nachträglich die praktische Bedeutung dieser Einschränkung, die sich in die meisten Theorien während des Ganges der Untersuchung einschleicht, weit geringfügiger finden, als man anfänglich zu vermuten geneigt wäre.

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 18, p. 550. 1905.

2) W. Esmarch, l. c.

3) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 10, p. 404. 1915.

4) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48, p. 1. 1915.

Unsere Voraussetzungen über die Lagerungsdichte lassen offenbar ein sehr weites Verwendungsgebiet für die Theorie zu. Wenn wir dieses Verhältnis ganz ausnutzen wollen, müssen wir aber unumgänglich die Unregelmäßigkeiten, welche in den Wechselwirkungen der Resonatoren auftreten, berücksichtigen. In der Regel ist dieses Problem nur durch eine ausweichende Voraussetzung behandelt worden, und auch wenn es, wie in einer neuerdings erschienenen Theorie von Buchwald¹⁾, im ersten Ansatz vollauf berücksichtigt ist, ließen sich jedoch die Rechnungen nicht bis zu verwertbaren Formeln durchführen. Das Problem in seiner größten Weite würde auch gewiß schwierig sein. Wir wollen es nur in der ersten Näherung behandeln, und zwar in der Weise, daß wir bei der Ermittlung des zerstreuten Lichtes die Abweichungen der Resonatorschwingungen vom Schwingungszustande im homogenen Körper mit in die Berechnung ziehen, bei der Berechnung dieser Abweichungen gleichwohl so rechnen, als ob die Resonatorschwingungen ganz regelmäßig verliefen.

§ 4. Berechnung der erregenden Kraft und des Resonator-momentes.

Unter dem Ausdrucke „die äußere Welle“ wollen wir im folgenden die Resultierende aller Erregungen verstehen, die von schwingenden Elektronen außerhalb des in Betracht stehenden kubischen Gebietes herrühren, mithin in erster Linie die von den Elektronen der Lichtquelle stammenden Erregungen, aber sodann auch die von den äußeren Molekülen des Gases ausgehenden.

Zu der Erregung durch die äußere Welle sind nach (8) noch die Einzelerregungen der Moleküle des Würfels hinzuzufügen, und, wie bereits erwähnt, wäre das durch eine Integration auszuführen. Durchaus unbedenklich ist ein solcher Übergang von Summation zu Integration jedoch nicht. Nahe an dem Molekül, dessen erregende Kraft wir berechnen wollen, müssen wir ja stets unregelmäßig angeordnete Nachbarmoleküle annehmen, die mitunter sehr große Wirkungen ausüben. Diesen Umstand würde die Integration gänzlich verwischen, was wenigstens vor einer diesbezüglichen Untersuchung nicht er-

1) E. Buchwald, Ann. d. Phys. 52, p. 775. 1917.

wünscht wäre. Wir wollen darum den Würfel in drei Teile zerlegen, indem wir um das Molekül rings zwei Kugelflächen mit den Radien r_0 und r_1 legen. Der Radius r_0 sei so klein abgemessen, daß die zugehörige Kugelfläche nie von dem Mittelpunkte eines Fremdmoleküls geschnitten wird. Er wird somit mit der Länge, die in der kinetischen Gastheorie als „Moleküldurchmesser“ figurirt, zusammenfallen. Auch der Radius r_1 sei klein gegen die Wellenlänge, doch so, daß der Kugelraum immer noch möglichst viele Moleküle enthält. Da die erregende elektrische Kraft offenbar unter Ausschluß der vom betrachteten Molekül selber erzeugten elektrischen Kräfte zu berechnen ist, gibt die innere Kugel r_0 zu ihr keinen Beitrag. Von den Molekülen in der Kugelschicht $r_0 < r < r_1$ kommen, wie erwähnt, unregelmäßige, aber zum Teil starke Felder. Hier wollen wir die Summation beibehalten. Endlich liefern die Moleküle im dritten Raumgebiete $r > r_1$ einen Anteil, der im großen und ganzen als regelmäßig angesehen werden darf. Zu seiner Berechnung wollen wir Integration benutzen. Wir schreiben folglich:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}' &= \mathcal{E}_0 + \sum_{r_0 < r < r_1}^{(M)} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \\ &+ \int_{r > r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N(x, y, z) d\omega, \end{aligned} \right.$$

wo $N(x, y, z)$ die auf die Volumeinheit bezogene Molekülnzahl an einem Punkte (x, y, z) im Volumelement $d\omega$ ist.

Die Gleichung (9) legt \mathcal{E}' als Funktion des Schwingungszustandes im ganzen Körper fest; andererseits ist jedes einzelne p durch die lokale \mathcal{E}' wegen (7) bestimmt. Wir vermögen mithin \mathcal{E}' sowohl wie p nur durch sukzessive Näherungen zu ermitteln. Laut der Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen wollen wir zuerst \mathcal{E}' aus (9) berechnen unter der Annahme, daß p überall genau so ist, wie wenn keine Dichteschwankungen stattfänden. Wir bekommen dadurch \mathcal{E}' in der ersten Annäherung, die ersten Potenzen der Parameter B_{mnp} allein enthaltend, und aus (7) auch p in derselben Annäherung. Wenn wir sodann den neuen Wert von p der Berechnung der Feldstärke in oder außer dem Würfel zugrunde

legen, erhalten wir diese in der zweiten Annäherung, B_{mnp} in der zweiten Potenz enthaltend. Mit diesem bleiben wir stehen. Wenn wir die Näherungen noch weiter fortsetzen sollten, so würden wir allerdings neue Glieder auch in B und B^2 auffinden; sie sind indes gegen die vorherigen zu vernachlässigen.

Bevor wir uns an die erstmalige Integration von (9) machen, wollen wir einen Vektor \mathfrak{P} durch die Gleichung

$$(10) \quad N_0 \mathfrak{p} = \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)}$$

eingeführen, wo N_0 die mittlere Molekühlzahl und n_0 der normale Brechungsindex des Gaswürfels ist. Natürlich dürfte n_0 etwaigenfalls komplex sein. Der Ansatz (10) besagt offenbar, daß wir eine ebene, in der Richtung der x -Achse fortlaufende Welle allein betrachten. Weil wir in diesem Teile der Analyse \mathfrak{p} von den Dichteschwankungen unabhängig voraussetzen, wird auch \mathfrak{P} von ihnen unabhängig sein. Im folgenden betrachten wir demgemäß \mathfrak{P} als einen im ganzen Würfel konstanten Vektor.

Das Integral in (9) läßt sich unter Benutzung des Ausdruckes (10) schreiben

$$(11) \quad I = \int_{r > r_1} \frac{N(x, y, z)}{N_0} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega;$$

aber nach (1)

$$\frac{N(x, y, z)}{N_0} = \frac{\varrho(x, y, z)}{\varrho_0} = 1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)},$$

mithin

$$I = \int_{r > r_1} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \int_{r > r_1} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \frac{\mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{n_0 x}{c}\right)}}{r} d\omega.$$

Die rot sind am Orte des Moleküls M' , also in bezug auf die Koordinaten (x', y', z') , nicht auf (x, y, z) , auszuführen. Wir können sie daher vor das Integralzeichen rücken und bekommen somit:

$$(12) \quad I = \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} J_1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} J_2,$$

wo

$$(13) \quad J_1 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\omega$$

und

$$(14) \quad J_2 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} e^{i \left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega n_0}{c}\right) x + i \frac{\pi}{L} (ny + pz)} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\omega.$$

Das Integral J_2 schreibt sich einfacher, wenn wir bereits an diesem Orte einen nachher auftretenden Vektor

$$(15) \quad \mathfrak{U} = i \frac{c}{\omega} \left(\frac{\omega n_0}{c} - \frac{\pi m}{L} \right) - i \frac{c}{\omega} \frac{\pi n}{L} - i \frac{c}{\omega} \frac{\pi p}{L}$$

eingeführen und außerdem die Koordinaten x, y, z als Komponenten eines Vektors \mathfrak{R} auffassen. Wir bekommen alsdann

$$(14a) \quad J_2 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} e^{-i \frac{\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\omega.$$

Die Volumintegrale (13) und (14a) lassen sich leicht in Flächenintegrale umformen. Wir haben zunächst

$$\begin{aligned} \Delta_M \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}; \\ \Delta_M e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} &= -\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}}; \\ \Delta_M e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} &= -\frac{\omega^2 \mathfrak{U}^2}{c^2} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}; \end{aligned}$$

wo

$$\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{U}_y^2 + \mathfrak{U}_z^2.$$

Aus diesen Ausdrücken folgen wir

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{c^2} J_1 &= \mathfrak{P} \int_{r > r_1} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\omega; \\ -\frac{\omega^2}{c^2} J_2 &= \mathfrak{P} \int_{r > r_1} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\omega; \end{aligned}$$

$$-\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} J_1 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} \Delta_M e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\omega;$$

$$-\frac{\omega^2 A^2}{c^2} J_2 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} \Delta_M e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\omega.$$

Durch Subtraktion der dritten dieser Gleichungen von der ersten und der vierten von der zweiten gehen zwei Gleichungen hervor

$$\frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 - 1) J_1 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} \left[e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} - \Delta_M e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] d\omega,$$

und

$$\frac{\omega^2}{c^2} (A^2 - 1) J_2 = \mathfrak{P} \int_{r > r_1} \left[e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \Delta_M \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} - \Delta_M e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] d\omega,$$

die mittels des Greenschen Satzes unmittelbar auf Flächenintegrale transformierbar sind:

$$(16) \quad \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 - 1) J_1 = \mathfrak{P} \int \left[e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

$$(17) \quad \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 - 1) J_2 = \mathfrak{P} \int \left[e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathbf{R}}{c}} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

wo das Flächenelement durch $d\sigma$ und die Normale nach außen mit ν bezeichnet ist. In beiden Fällen ist die Integration sowohl über die äußere Begrenzung F des Würfels wie über die Kugeloberfläche $r = r_1$ zu vollstrecken.

Unsere Aufmerksamkeit richten wir jetzt in erster Reihe auf die Anteile des Integrals I , die von der Kugeloberfläche herühren. Wir haben Differentialausdrücke zu untersuchen von den beiden Typen

$$(18) \quad K_1 = \text{rot}_M \cdot \text{rot}_{M'} \int_{r=r_1} \mathfrak{F}(M) \cdot \frac{d}{d\nu} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma$$

und

$$(19) \quad K_2 = \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \int_{r=r_1} \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dv} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma,$$

wo \mathfrak{F} ein beliebiger Vektor sei. Wir gehen von der Formel aus

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) &= \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{c r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \mathfrak{F}(M) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{r^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{3i\omega}{c r^2} - \frac{3}{r^3} \right) (r \times \mathfrak{F}(M)) \right] e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}. \end{aligned} \right.$$

Der Vektor r weist dabei von M' nach M . Es folgt

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{r=r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \frac{d}{dv} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) d\sigma &= \int_{r=r_1} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r^2} - \frac{2i\omega}{c r^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{r^4} \right) \mathfrak{F}(M) - \frac{r}{r^3} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r^2} - \frac{6i\omega}{c r^3} - \frac{9}{r^4} \right) (r \times \mathfrak{F}(M)) \right] \\ &\quad \left. e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} d\sigma + \frac{i\omega}{c} \int_{r=r_1} \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \left(\mathfrak{F}(M) \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Die Verwertung der Integrale (18) und (19) soll so gelenkt werden, daß das Endergebnis durch den Wert der Funktion \mathfrak{F} und ihrer Ableitungen im Punkte M' bestimmt und in einer Potenzreihe von r_1 geordnet erscheinen wird. Dies kann erreicht werden durch die Entwicklungen

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F}(M) &= \mathfrak{F}(M') + (r \times \text{grad}) \mathfrak{F}(M') + \frac{1}{2!} (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') \\ &\quad + \frac{1}{3!} (r \times \text{grad})^{(3)} \mathfrak{F}(M') + \frac{1}{4!} (r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M') + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} &= e^{i\omega t} - \frac{i\omega r}{c} e^{i\omega t} - \frac{1}{2!} \frac{\omega^2 r^2}{c^2} e^{i\omega t} \\ &\quad + i \cdot \frac{1}{3!} \frac{\omega^3 r^3}{c^3} e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Es ist einleuchtend, daß diejenigen Glieder der Entwicklung (22), die in bezug auf den Vektor r von ungeradem Grade sind, keinen Beitrag zu den Integralen liefern können. Die geraden Glieder veranlassen dagegen die Entstehung einiger Integrale, die gefunden werden müssen, um die erwünschte

Verwertung des Integrals (21) zu erzielen. Es sind die nachstehenden

$$S_1 = \int_{r=r_1} [\mathfrak{F}(M') - \frac{r}{r^2} [\mathbf{r} \times \mathfrak{F}(M')]] d\sigma = \frac{8\pi}{3} r_1^2 \mathfrak{F}(M');$$

$$S_2 = \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') - \frac{r}{r^2} [\mathbf{r} \times (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\ = \frac{16\pi}{15} r_1^4 \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{8\pi}{15} r_1^4 \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M');$$

$$T_1 = \int_{r=r_1} \left[\mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^2} [\mathbf{r} \times \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma = 0;$$

$$T_2 = \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^2} [\mathbf{r} \times (r \times \text{grad})^{(2)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\ = \frac{8\pi}{15} r_1^4 \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{8\pi}{5} r_1^4 \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M');$$

$$T_3 = \int_{r=r_1} \left[(r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M') - \frac{3r}{r^2} [\mathbf{r} \times (r \times \text{grad})^{(4)} \mathfrak{F}(M')] \right] d\sigma \\ = \frac{16\pi}{35} r_1^6 \Delta_{M'} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') - \frac{48\pi}{35} r_1^6 \Delta_{M'} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M').$$

Der Ausdruck für K_1 wäre jetzt nach (21) zu finden. Anstatt die langen Vektorformeln im Ergebnis hinzuschreiben, benutzen wir die obigen Verkürzungen; nur setzen wir sogleich $T_1 = 0$. Dann ergibt sich:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{\omega^2}{c^2 r_1^2} S_1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r_1^4} T_2 \right) e^{i\omega t} + \left(\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{c^4} S_1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2 r_1^2} S_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2 r_1^2} T_2 - \frac{1}{8 r_1^4} T_3 \right) e^{i\omega t} - \left(\frac{1}{3} \frac{\omega^5}{c^5} r_1 S_1 \right) i e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied ist bezüglich r_1 von der Dimension Null, das zweite von der Dimension r_1^2 und das dritte von der Dimension r_1^3 . Die Reihe weiter zu verfolgen ist nicht nötig.

In derselben Weise können wir den Differentialausdruck K_2 erledigen. Wir gehen von (20) aus, die wir an der Funktion

$$\frac{d\mathfrak{F}(M)}{dv} = - \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr}$$

verwenden;

$$K_2 = \int_{r=r_1} \left[- \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{i\omega}{c r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr} \right. \\ \left. + \frac{r}{r^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{3i\omega}{c r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr} \right) \right] e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} d\sigma.$$

Aber nach (22)

$$\frac{d\mathfrak{F}(M)}{dr} = \frac{1}{r}(\mathbf{r} \times \text{grad})\mathfrak{F}(M) + \frac{1}{r}(\mathbf{r} \times \text{grad})^{(2)}\mathfrak{F}(M) \\ + \frac{1}{2!r}(\mathbf{r} \times \text{grad})^{(3)}\mathfrak{F}(M) + \frac{1}{3!r}(\mathbf{r} \times \text{grad})^{(4)}\mathfrak{F}(M) + \dots$$

folglich mit denselben Verkürzungen wie in (24):

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{r_1^4} T_2 e^{i\omega t} - \left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1^2} S_2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^3}{c^3 r_1^2} T_2 - \frac{1}{6 r_1^4} T_3 \right) e^{i\omega t} \\ &+ \left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1} S_3 - \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{c^3 r_1} T_3 \right) i e^{i\omega t} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (24) und (25) ergeben endlich

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} K_1 - K_2 &= \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \int_{r=r_1} \left[\mathfrak{F}(M) \frac{d}{dv} - \frac{d}{dv} \mathfrak{F}(M) \right] \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\sigma \\ &= e^{i\omega t} \left[\left(\frac{\omega^3}{c^3 r_1^2} S_1 - \frac{5}{2 r_1^4} T_2 \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{c^4} S_1 + \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{c^3 r_1^2} S_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{c^3 r_1^2} T_2 - \frac{7}{24} \frac{1}{r_1^4} T_3 \right) + i \cdot \left(-\frac{\omega^5 r_1}{3 c^5} S_1 - \frac{\omega^3}{c^3 r_1} S_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{c^3 r_1} T_2 \right) \right] = e^{i\omega t} \left[\left(\frac{8\pi}{3} \frac{\omega^3}{c^2} \mathfrak{F}(M') - \frac{4\pi}{3} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\pi \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \right) + r_1^2 \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} \mathfrak{F}(M') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\pi}{15} \Delta_{M'} \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') + \frac{2\pi}{5} \Delta_{M'} \text{grad}_{M'} \text{div}_{M'} \mathfrak{F}(M') \right) \right. \\ &\quad \left. - i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \left(\frac{\omega^3}{c^2} \mathfrak{F}(M') + \Delta_{M'} \mathfrak{F}(M') \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Um die Abhängigkeit der Funktion (26) von der noch nicht festgelegten vektoriellen Funktion \mathfrak{F} zu betonen, bezeichnen wir sie mit $K(\mathfrak{F})$. Alsdann läßt sich (12) vermöge (16) und (17) folgendermaßen schreiben

$$(27) \quad I = I_0 + I_F,$$

wo

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0 &= \frac{c^2}{\omega^2(n_0^2 - 1)} K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega n_0 z}{c}} \right) \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_P B_{mnp} \frac{c^2}{\omega^3(A^2 - 1)} K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega n \times \mathfrak{R}}{c}} \right) \end{aligned} \right.$$

und I_F anstatt der über die Oberfläche F des Würfels erstreckten Flächenintegrale steht. Wie ersichtlich, müssen also die Funktionen

$$K\left(\mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}}\right) \quad \text{und} \quad K\left(\mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}\right)$$

ermittelt werden.

Infolge der Transversalität des Lichtes ist $\mathfrak{P}_x = 0$, folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} = 0$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -i\frac{\omega}{c} \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}.$$

Zudem hatten wir bereits

$$\Delta \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} = -\frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}}$$

und

$$\Delta \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Delta^2 \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}.$$

Es folgt

$$\Delta \Delta \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} = \frac{\omega^4 n_0^4}{c^4} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}}$$

und

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}};$$

$$\Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = \frac{\omega^4}{c^4} \Delta^2 \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}};$$

$$\Delta \Delta \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} = \frac{\omega^4}{c^4} \Delta^4 \mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}}.$$

Diese Ausdrücke ergeben zusammen mit (26):

$$\begin{aligned} K\left(\mathfrak{P}e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}}\right) &= \left[\frac{4\pi}{3} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 2) - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^4}{c^4} (n_0^2 - 1)(n_0^2 + 10) r_1^2 \right. \\ &\quad \left. + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} (n_0^2 - 1) r_1^3 \right] \mathfrak{P}e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)}; \end{aligned}$$

und

$$K \left(\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega \mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c}} \right) = \left[\frac{4\pi}{3} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 2) - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^4}{c^4} (A^2 - 1) (A^2 + 10) r_1^2 \right. \\ \left. + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^5}{c^5} (A^2 - 1) r_1^3 \right] \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \\ + \left[-4\pi \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^4}{c^4} (A^2 - 1) r_1^2 \right] \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \times \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)}.$$

Wenn wir die letzten zwei Resultate in (28) einführen, bekommen wir

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0 = \mathfrak{P} \left\{ \left[\frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^3 + 1} - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 10) r_1^2 + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \right] \right. \\ \left. e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_1^2 \right. \right. \\ \left. \left. + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_1^3 \right] e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \right\} + \mathbf{u} \left\{ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \right. \\ \left. \left[\frac{-4\pi}{A^2 - 1} + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_1^2 \right] \mathbf{u} \times \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{\mathbf{u} \times \mathfrak{R}}{c} \right)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die erregende Kraft in einem Gase läßt sich somit in eine unendliche Reihe von Wellenzügen zergliedern. Außer Gliedern, die dem Hauptgliede ganz analog gebaut sind, und die es nur betrifft des Betrages vergrößern oder verkleinern, treten noch Vektoren hinzu, deren Richtung mit \mathfrak{P} nicht zusammenfällt.

Wir haben jetzt die erregende Kraft folgendermaßen in Komponenten zerlegt:

1. die einfallende äußere Welle \mathfrak{E}_0 ;
2. ein Oberflächenintegral I_F über die ganze Würfeloberfläche;
3. ein Oberflächenintegral I_0 über eine sphärische Fläche um den Aufpunkt;
4. eine Gliedersumme, die von den Molekülen innerhalb dieser Kugelfläche herkommt.

Das Glied I_F setzt sich zusammen aus einem Hauptgliede, dem geordneten Vorgänge entsprechend,

$$(30) \quad \left\{ \frac{c^2}{\omega^2 (n_0^2 - 1)} \text{rot}_M' \text{rot}_M' \mathfrak{P} \int_F \left[e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega n_0 x}{c}} \right] \right. \\ \left. \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\sigma \right\}$$

und einer dreifach unendlichen Reihe von Gliedern, die auf den ungeordneten Dichteschwankungen beruhen:

$$(31) \left\{ \frac{e^2}{\omega^2 (A^2 - 1)} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \operatorname{rot}_M \operatorname{rot}_M \mathfrak{P} \int_F \left[e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{d}{dv} - \frac{d}{dv} e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right] e^{\frac{i \omega}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)} d\sigma \right.$$

Nach Oseen¹⁾ wird der Ausdruck (30) die einfallende Welle genau kompensieren.

Die Glieder (31) werden überall im Würfel Felder erzeugen, die sich zwar im räumlichen Mittel aufheben, die aber dennoch stets die Felder, die auf den Schwankungsparametern B_{mnp} beruhen, an jedem Punkte in ganz gesetzmäßiger Weise beeinflussen. Man kann indessen darlegen, daß sie für die optischen Erscheinungen gänzlich belanglos sind.

Einmal erscheint nämlich das Oberflächenintegral in (31) mit dem Faktor

$$\frac{1}{A^2 - 1}$$

multipliziert, die von B_{mnp} abhängigen Glieder in (29) dagegen mit den Faktoren

$$\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{U} \cdot \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1}.$$

Sobald eine der Größen

$$\frac{c \pi}{\omega L} m, \quad \frac{c \pi}{\omega L} n \quad \text{oder} \quad \frac{c \pi}{\omega L} p$$

groß ist — und wie wir sehen werden, wird nur dieser Fall von praktisch beobachtbarer Bedeutung sein —, geht jener gegen Null, diese aber gegen endliche Grenzwerte.

Auch wenn die Glieder (31) nicht verschwänden, würden sie indessen schwerlich merkbar mitspielen. Um diesen Punkt klarer zu gestalten, schreiben wir zuerst der Einfachheit halber

$$I_0 = \mathfrak{E}_1 e^{i \omega \left(t - \frac{v_0 \mathfrak{P}}{c} \right)} + \sum_{m_1 n_1 p_1} \mathfrak{E}_2 e^{i \omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c} \right)},$$

und haben sodann nach (31) ein gewisses Zusatzglied hinzuzufügen, so daß die lokale erregende Kraft

1) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48, p. 18. 1915.

$$\mathfrak{E}_1 e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)} + \sum_{m_1, n_1, p_1} \mathfrak{E}_2 e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}\right)} + \sum_{m_2, n_2, p_2} \mathfrak{E}_3 e^{i\omega(t - \delta)}$$

zu schreiben wäre. Die \mathfrak{E} sind hier gewisse Vektorfunktionen und δ eine verwickelte Funktion der Koordinaten. \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 und δ sind auch von m , n und p abhängig. Nur wenn δ_{mnp} mit der Koordinatenfunktion

$$\frac{1}{c} \mathfrak{U}_{mnp} \times \mathfrak{R}$$

im Argumente des entsprechenden Gliedes in der ersten Summe zusammenfiel oder wenigstens mit ihr in einer physikalisch einfachen Beziehung stünde, wäre in einem beliebigen Punkte des Opaleszenzfeldes ein möglicher Einfluß zu erwarten. Es muß aber gewiß auch ohne eingehende Erörterung als sehr unwahrscheinlich empfunden werden, daß δ derart mit dem Argumente

$$\frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}$$

verknüpft wäre.

Die Summe

$$(32) \quad \sum_{r_0 < r < r_1}^{(M)} \text{rot}_{M'} \cdot \text{rot}_{M'} \cdot \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

beruht auf der jedesmaligen Lage der betreffenden Moleküle, und zwar im allgemeinen nicht nur weil r davon abhängig ist, sondern auch, weil p gemäß den örtlichen, stark inhomogenen Feldern von Molekül zu Molekül variiert und hier nicht länger mit dem Mittelwerte ersetzt werden darf. Die Summe (32) in ihren statistischen Gesetzen zu ermitteln, erscheint darum zurzeit aussichtslos. Zum Glück sind die Schwankungen von (32) für unseren Zweck innerhalb weiter Grenzen ohne Einfluß. Denn wir können niemals das Opaleszenzfeld eines Einzelresonators beobachten, sondern messen die vereinigte Wirkung einer großen Anzahl Moleküle und brauchen für unsere Beobachtungen eine so geraume Zeit, daß jedes Molekül inzwischen eine ganze Reihe verschiedener Schwingungszustände zurückgelegt hat. Möge also jedes einzelne Molekül nach den statistischen Gesetzen beliebigen Schwankungen unterliegen, wir beobachten doch immer nur einen Mittelwert, und wir werden sogleich nachweisen, daß wir gerade diesen Mittel-

wert bekommen, wenn wir statt der Summation auch betreffend (32) Integration benutzen.

Zu dem Ende teilen wir den Bereich $r_0 < r < r_1$ in n Volumenelemente, die wir uns nach Null hinstrebend vorstellen. Außer dem Kugelzentrum seien die m Elemente $d\omega_i, d\omega_i \dots d\omega_m$ von je einem Molekülmittelpunkte besetzt. Die Wahrscheinlichkeit dieser Molekülkonfiguration bezeichnen wir mit $W(i_1 \dots i_m)$. Wenn sie statthat, sei das Feld im Kugelmittelpunkte $\mathcal{E}(i_1 \dots i_m)$. Es setzt sich zusammen aus dem im größeren Sinne geordneten Felde (29) und dem ungeordneten, aber durch die i bestimmten Feld (32). Im Felde $\mathcal{E}(i_1 \dots i_m)$ schwingt das Molekül mit dem Momente $p(i_1 \dots i_m)$. Dadurch wird am fernen Beobachtungsorte eine Feldstärke bewirkt, deren Amplitude $e(i_1 \dots i_m)$ sei. Ihre Phase zu einer beliebig festgelegten Zeit t_0 sei $\delta(i_1 \dots i_m)$.

Wenn wir das Gedankenexperiment machen, daß es möglich wäre, die Wirkung der Moleküle in der Kugel r_1 für sich zu beobachten, so würden wir in einem bestimmten Augenblicke das Feld

$$e^{i\omega t} \sum e e^{-i(\omega t_0 - \delta)}$$

wahrnehmen. Wir haben dabei implizite die zulässige Annahme gemacht, daß eine Verschiebung eines Resonators um einen kleinen Bruchteil einer Wellenlänge bei unverändertem Momente ohne merklichen Einfluß auf das Strahlungsfeld am fernen Beobachtungsorte sei. Wir nehmen zuerst an, daß die Moleküle in der Kugel sehr zahlreich sind. Für jedes dieser Moleküle sind die umgebenden Moleküle, die um dasselbe in einem Abstände $< r_1$ gelegen sind, anderswie angeordnet, so daß man unter hinreichend vielen Molekülen immer einen Bruchteil $W(i_1 \dots i_m)$ finden wird, deren Lage relativ zu den Nachbarmolekülen durch die Indizes $(i_1 \dots i_m)$ gekennzeichnet sind. In diesem Falle werden wir also das Feld

$$(33) \quad e^{i\omega t} \sum W(i_1 \dots i_m) e(i_1 \dots i_m) e^{-i(\omega t_0 - \delta(i_1 \dots i_m))}$$

messen, wo die Summation jetzt nicht wie in der vorigen Formel über alle Moleküle, sondern über alle Molekülanordnungen, d. h. alle Veränderlichen i , zu erstrecken ist.

Da es uns gleichgültig ist, wie sich die Einzelmomente in der Kugel verteilen, wenn nur ihre Resultierende die gleiche

bleibt, so können wir diese Momente in ihrem bunten Wechsel durch ein durchschnittliches Moment

$$\Sigma W(i_1 \dots i_m) p(i_1 \dots i_m)$$

am Orte jedes Moleküls ersetzen. Nach (7) ist indessen $p(i_1 \dots i_m)$ mit $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$ linear verknüpft. Wir müssen also unverändert die gleiche Feldstärke im Opaleszenzfelde wahrnehmen, wenn wir anstatt des inhomogenen Erregungsfeldes $\mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$ überall in der Kugel ein homogenes Feld

$$(34) \quad \Sigma W(i_1 \dots i_m) \mathcal{E}'(i_1 \dots i_m)$$

annehmen.

Die einzelnen Moleküle bewegen sich bekanntlich, von den größten Dichten des Gases abgesehen, sehr nahe unabhängig voneinander. Dies besagt, daß alle Volumelemente der Kugelschicht $r_0 < r < r_1$ gleichwertig sind und ebenso häufig von Molekülen besetzt werden können. W ist somit von der Variation der Veränderlichen i unabhängig. Diesem Umstande tragen wir gerade Rechnung, wenn wir die Summe (34) mit einem Integral ersetzen.

Wir haben vorher das Feld, das auf ein willkürlich herausgegriffenes Molekül wirkt, auf die Form

$$I_0 + \sum_{r_0 < r < r_1} (M) \text{rot}_M' \text{rot}_M' \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

reduziert. Aus (34) folgt, daß es zulässig ist, dafür überall im physikalisch kleinen Bereiche zu schreiben

$$I_0 + \Sigma W(i_1 \dots i_m) \sum_{i_1}^{i_m} (M) \text{rot}_M' \text{rot}_M' \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Damit sind die schwankenden augenblicklichen Werte mit einem Mittelwerte ersetzt worden. Das zweite Summationszeichen gilt für die Moleküle, ihre Konfiguration festgehalten, das erste gilt für die verschiedenen möglichen Konfigurationen. Das soeben genannte, besonders einfache Wahrscheinlichkeitsgesetz endlich ermöglicht es uns auch, diesen Ausdruck zu vereinfachen:

$$(35) \quad I_0 + \int_{r_0 < r < r_1} \text{rot}_{M'} \cdot \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N d\omega,$$

wo die Bezeichnungen jetzt wieder dieselben sind wie in (9), p mithin das durchschnittliche Resonatorenmoment in der Kugel bedeutet.

Wir ersehen jetzt auch die reale Bedeutung unserer Voraussetzung über die Lagerungsdichte der Moleküle. Sie bedeutet nicht, daß in jedem Augenblicke in der Kugel r_1 eine große Anzahl Moleküle dort zu sein brauchen. Sie sagt nur aus, daß die Moleküle so zahlreich sein müssen, daß unser System schon in einem Bruchteile einer Sekunde so viele verschiedene Zustände durchläuft, daß das mittlere Feld dem Werte (34) genügend nahe kommt. So groß wie die Molekülgeschwindigkeiten in der Tat sind, wird dieser Bedingung offenbar auch bei sehr kleinen Drucken genügt.

Streng genommen mißt man allerdings nicht die Amplitude des Opaleszenzfeldes, sondern die Intensität. Wenn das mittlere Feld kurzweg e_m bezeichnet wird, und die zufällige Abweichung von dem Mittelwerte Δe ist, so beobachtet man somit nicht $e_m + \Delta e$, sondern $(e_m + \Delta e)^2$. Die Δe heben sich freilich bereits während der kürzesten Beobachtungsdauer auf. So nicht die Δe^2 . Wünscht man auch die zweiten Potenzen zu berücksichtigen, würde man folglich ein kleines Zusatzglied bekommen. Dieses muß aber sehr klein sein bei großen Dichten, weil stets viele Molekülkonfigurationen zugleich unter Beobachtung sind, und bei kleinen Drucken, weil die Wechselwirkungen für kleine Abstände r der Moleküle proportional $1/r^3$ sind und also bei sinkenden Drucken für immer weniger Moleküle beträchtlich werden im Vergleiche zur hauptsächlichsten Erregungskraft (29).

Aus (9) erfolgt, wenn wir die Erwägungen beachten, die uns zu (35) führten

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_0 + \int_{r > r_0} \text{rot}_{M'} \cdot \text{rot}_{M'} \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot N d\omega = I_0(r_0).$$

I_0 bedeutet natürlich hier das gleiche wie in (29), nur mit dem dortigen r_1 , hier mit r_0 ersetzt, mithin

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{P} \left\{ \left[\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + 10) r_0^2 \right. \right. \\
 + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_0^3 \left. \right] e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{4\pi}{9} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \right. \\
 - \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_0^2 + i \cdot \frac{8\pi}{9} \frac{\omega^3}{c^3} r_0^3 \left. \right] e^{i\omega \left(t - \frac{11 \times 91}{c} \right)} \left. \right\} \\
 + 11 \left\{ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left[\frac{-4\pi}{A^2 - 1} \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_0^2 \right] 11 x \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{11 \times 91}{c} \right)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Wir können jetzt eine Abschätzung der verschiedenen Glieder versuchen. Die Größe r_0 können wir nämlich der kinetischen Gastheorie entnehmen. Sie ist von der Größenordnung 10^{-8} cm, beträgt z. B. für die atmosphärische Luft im Mittel $3 \cdot 10^{-8}$ cm. Dies bedeutet, daß die Glieder mit r_0^2 und r_0^3 einen sehr kleinen Faktor enthalten. Allerdings sind sie auch mit den sehr großen Faktoren

$$\frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\omega^3}{c^3}$$

multipliziert. Es ist aber

$$\frac{\omega r_0}{c} = \frac{2\pi r_0}{\lambda},$$

und dieser Quotient ist klein, sobald r_0 gegen λ klein ist, eine Größenbeziehung, die in der Praxis immer erfüllt ist. Für Na-Licht in atmosphärischer Luft finden wir z. B.

$$\frac{2\pi r_0}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Der Schritt von r_1 als Integrationsgrenze auf r_0 , den wir soeben haben tun können, bedeutet offenbar in dieser Hinsicht einen Gewinn. Denn wenn man, wie bisher, eine untere Integrationsgrenze so definiert wie r_1 benutzen muß, erscheint es einigermaßen zweifelhaft, ob der Limesübergang nach Null wirklich unbedenklich ist, namentlich bei ultravioletttem Lichte.

Mehrere der Glieder in (36) können wir jetzt ohne weiteres fortlassen. Nur sind die Ungleichheiten

$$\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \gg \frac{2\pi}{15} \frac{\omega^2}{c^2} (A^2 + 10) r_0^2,$$

$$\frac{4\pi}{A^2 - 1} \gg \frac{2\pi}{5} \frac{\omega^2}{c^2} r_0^2$$

noch nicht unanfechtbar. Wir haben nämlich den Größen m , n und p , die mit A durch Gleichung (15) verbunden sind, keine obere Grenze vorgeschrieben, und wir ersehen, daß unsere Ungleichheiten trügerisch zu werden beginnen, falls einer dieser Parameter, z. B. m , hinreichend groß wird, um

$$\frac{\pi m}{L} \quad \text{gegen} \quad \frac{1}{r_0}$$

bemerkbar zu machen. So große Werte von m schließen wir von jetzt ab aus, und diese Annahme kann nicht gewagt oder bedenklich erscheinen, wenn wir erwägen, daß wir damit nur solche physikalisch bedeutungslose Dichtewellen absondern, deren Wellenlängen von der Größenordnung des Moleküldurchmessers sind.

Wir bekommen somit

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)} \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} \right. \\ &\quad \left. - 4\pi \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{c}\right)} \end{aligned} \right.$$

In die Schwingungsgleichung

$$(7) \quad \frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} + g \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \omega_0^2 \mathfrak{p} - \frac{2e^2}{3mc^2} \frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} = \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}'$$

ist folglich rechts der Ausdruck (37) zu substituieren. Das Glied mit

$$\frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3}$$

bleibt ersichtlich noch in der Gleichung von der rechten Seite unbeeinflusst. Es liegt aber auf der Hand, daß unsere Ableitung nur für ein Gas gültig ist. Auf homogene Körper mit unveränderlicher Dichte, wie etwa die Kristalle, sind unsere Auseinanderlegungen nicht zu übertragen. Soweit ich sehe, ist gerade die Inhomogenität in physikalisch keinen Be-

Bereichen die notwendige Bedingung für das Zustandekommen des Strahlungsgliedes.

Das mittlere Moment eines Moleküls ergibt sich jetzt aus (7) und (37) in der neuen Näherung

$$(38) \left\{ \begin{aligned} p_1 = & \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \left[\frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)} \right. \\ & \left. + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - 4\pi \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{H}}{c} \right)} \right]. \end{aligned} \right.$$

p_1 schwingt mithin harmonisch, aber mit einer Amplitude, die infolge der Abhängigkeit von B_{mnp} unablässigen Schwankungen unterworfen ist. Wenn wir jedoch die Amplitude über eine hinreichend lange Zeit mitteln, so wird erhalten

$$\overline{p_1} = \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)}$$

oder gemäß (10)

$$\overline{p_1} = \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{n_0^2 + 2}{n_0^2 - 1} N_0 \mathfrak{p}.$$

Wenn wir $\overline{p_1} = \mathfrak{p}$ setzen, erfolgt aus dieser Gleichung, daß es zwischen den Resonatorenkonstanten e , m , g und ω_0 und dem Brechungsindex n_0 die Beziehung

$$(39) \quad \frac{e^2}{m \left(-\omega^2 + i g \omega + \omega_0^2 + i \cdot \frac{2e^2 \omega^3}{3m c^3} \right)} = \frac{3}{4\pi N_0} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$$

bestehen muß. Es ist dies eine der bekannten Gleichungen in der Theorie von Lorentz.

Wenn man sie zur Vereinfachung der Gleichung (38) benutzt, so wird sich p_1 in der klareren Form

$$(40) \left\{ \begin{aligned} p_1 = & \mathfrak{p} + \frac{1}{N_0} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \\ & \left(\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - 3 \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{i\omega \left(t - \frac{\mathfrak{U} \times \mathfrak{H}}{c} \right)} \end{aligned} \right.$$

herstellen, die den Charakter des p_1 als Produkt eines Näherungsverfahrens unmittelbar zum Vorschein bringt.

§ 5. Untersuchung des Feldes außerhalb des Würfels.
Homogener Körper.

Homogen nennen wir einen Körper, dessen Ungleichartigkeiten sich erst dann zeigen, wenn man zu Dimensionen von der Größenordnung der Molekülientfernungen herabsteigt. Homogen im Sinne dieser Definition sind also etwa die Kristalle, nicht aber die Gase und überhaupt strukturlose Körper, wo die Moleküle nach den Gesetzen des Zufalles verteilt sind, denn hier können lokale Verdichtungen vorhanden sein, deren Ausdehnung groß gegen die Molekülientfernungen sind, obgleich vielleicht klein gegen die Wellenlänge. Unsere Definition ist enger als diejenige von Planck, welche nur optische Gleichwertigkeit von Elementen erfordert, die von der Größenordnung der optischen Wellenlängen sind, und welche darum auch die trüben Medien von Rayleigh miteinschließt. Für uns bilden diese eine besondere Klasse, die eine besondere Behandlung erfordert.

In der Extinktionstheorie von Planck werden nicht die beiden Klassen von Körpern unterschieden. Alle beide sollen in seinen Ergebnissen über die Opaleszenz eingeschlossen sein. Diese Unklarheit ist die Ursache der Streitigkeiten, die sich um seine Resultate entsponnen haben. Es möchte deshalb angebracht sein, das Studium des Außenfeldes unseres Würfels mit einigen Auseinandersetzungen über *homogene* Körper zu beginnen.

Die Aufgabe gilt natürlich dem Felde um den Würfel, so wie es sein würde, wenn sich keine absorbierende Materie zwischen dem Würfel und dem Beobachter befände. In der Wirklichkeit, wo der Würfel bloß ein Teil eines ausgedehnteren Mediums ist, müssen die Erregungen aus dem Würfel selbstverständlich teilweise durch die Felder der äußeren Resonatoren kompensiert erscheinen.

Ähnlich wie oben, Gleichung (9), erhalten wir für das zu untersuchende Feld

$$(41) \quad \mathfrak{E} = \int_{\Omega} \text{rot}_{M'} \text{rot}_M \frac{v \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} N_0 d\omega.$$

Das Integral ist natürlich über den ganzen Würfel Ω zu vollführen, die Rotationen am Beobachtungsorte M' zu berechnen. M' , dessen Abstand von dem jeweiligen Integrationselemente

r ist, sei hinsichtlich seiner Lage durch einen Vektor r_0 mit dem Koordinatenanfangspunkte als Angriffspunkt bestimmt.

Da wir die Dichteschwankungen aus der Rechnung weglassen, wird nach (40) p_1 überall gleich p , mithin gemäß (10)

$$\mathfrak{E} = \int_{\Omega} \text{rot}_{M'} \text{rot}_M \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}} d\omega,$$

wo \mathfrak{P} im ganzen Integrationsraume konstant ist.

Das gleiche Verfahren, das nach (16) führte, gibt hier \mathfrak{E} als ein Flächenintegral über die Würfeloberfläche

$$\mathfrak{E} = \frac{c^2}{\omega^2(n_0^2 - 1)} \int_F \text{rot}_{M'} \text{rot}_M \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{dv} - \frac{d}{dv} \mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}} d\sigma.$$

Mit Gleichung (20) als Ausgangspunkt können die Rotationen leicht bewerkstelligt werden, und man erhält \mathfrak{E} als eine Summe von Gliedern, die r im Nenner in verschiedenen Potenzen enthalten. Da r sehr groß ist, können wir nach Gutachten der Glieder, die mit r^{-2} oder noch schneller abnehmen, fortlassen oder mitnehmen. Wir erhalten demgemäß angenähert

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{n_0^2 - 1} \int_F (r \wedge \mathfrak{P}) \wedge r \left[e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{dv} - \frac{d}{dv} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}.$$

Der erste Faktor hinter dem Integralzeichen besagt, daß \mathfrak{E} sich um das schwingende Moment \mathfrak{P} nach den nämlichen Gesetzen verteilt, welche die elektrische Kraft um einen schwingenden Dipol regeln. Wenn wir auf die Richtung von \mathfrak{E} verzichten und ferner für den Winkel zwischen \mathfrak{P} und r den Winkel ϑ zwischen \mathfrak{P} und r_0 als Näherungswert einführen, können wir etwas einfacher schreiben

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} |\mathfrak{E}| &= \frac{\sin \vartheta}{n_0^2 - 1} \int_F \left[|\mathfrak{P}| e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{d}{dv} - \frac{d}{dv} |\mathfrak{P}| e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \right] e^{\frac{i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}} \end{aligned} \right.$$

Wie ich in einem früheren Aufsatz¹⁾ nachgewiesen habe, genügt die Feldstärke im Würfel der Beziehung

$$(43) \quad \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{n_0^3 - 1} \mathfrak{P} e^{i\omega \left(t - \frac{n_0 x}{c} \right)}.$$

Das ergibt, in (42) eingeführt, wenn wir überall u anstatt $|\mathfrak{E}|$ schreiben

$$(44) \quad u = \frac{\sin \theta}{4\pi} \int_V \left[u \frac{d}{dv} - \frac{du}{dv} \right] \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r}.$$

Dies ist nichts anderes als das Kirchhoffsche Beugungsintegral über die Würfelfläche. Bei den entsprechenden Beugungserscheinungen wollen wir nicht verweilen. Teils sind sie bereits von Buchwald²⁾ ausführlich besprochen, teils besitzen sie an und für sich für uns kein Interesse. Der Würfel ist ja nur etwas Gedachtes. Wir haben nie angenommen, daß er von der umgebenden Gasmasse wirklich abgetrennt wäre. In der Tat wird (44) immer von einem genau kompensierenden Integral aus dem umgebenden Gase begleitet.

Was wir aber desto kräftiger hervorheben wollen, ist, daß dies *nicht* das Plancksche Opaleszenzfeld ist. *Ein homogener Körper gibt keine Opaleszenz.* Und diese Tatsache ist von jeder Annahme über das Dämpfungsglied unabhängig.

Es ist leicht zu erkennen, wie es kommt, daß wir zu anderen Resultaten als Planck gelangen. Denn was Planck berechnet hat, und *richtig* berechnet hat, ist die Zerstreuung des Lichtes in einem Medium, wo die Schwingungen der Differentialgleichung mit dem dreigepunkteten Dämpfungsgliede genügen. Er hat aber nicht untersucht, ob diese Gleichung allgemein gültig ist. Hier treten die Arbeiten von Mandelstam, Lorentz und Oseen ergänzend hinzu, nach welchen das Dämpfungsglied in homogenen Medien fortfällt. Die Anwendung der Theorie von Planck auf solche Körper ist demnach verboten.

Die Antwort auf die Frage, die wir anfangs streiften, ob wir neben einer Keesom-Einsteinschen Extinktion auch

1) R. Lundblad, Ann. d. Phys. 57. p. 183. 1918.

2) E. Buchwald, l. c.

eine Rayleigh-Plancksche annehmen müssen, ob der Extinktion durch die Dichteschwankungen noch eine besondere Dämpfungsstrahlung beizugeben ist, tritt jetzt klarer hervor. Indem wir das Ergebnis des folgenden Paragraphen vorwegnehmen, können wir dieselbe folgendermaßen beantworten:

In homogenen Körpern, wo die Dichte auch im physikalisch kleinen Gebiete unveränderlich ist, fällt sowohl das Dämpfungsglied wie die Extinktion fort.

In Gasen, die Dichteschwankungen geben, gibt es sowohl Strahlungsdämpfung wie Extinktion.

Ob man alsdann das Dämpfungsglied oder die Dichteschwankungen als die wahre Ursache der Extinktion anzusehen wünscht, ist ja hier ganz gleichgültig. Wahrscheinlich ist es am korrektesten, das Dämpfungsglied, das nur ein Durchschnitt ist und in der Tat von Molekül zu Molekül variiert, als die Folge der regellosen Verteilung der Moleküle und damit, falls man so will, als eine Folge der Dichteschwankungen zu betrachten.

§ 6. Das Opaleszenzfeld. Erste Näherung.

Die folgende, erste angenäherte Ermittlung des Opaleszenzfeldes berücksichtigt die Verdichtungen und Verdünnungen in der Resonatorennagerung, wohingegen, die einzelnen Resonatorenamplituden nur infolge einer etwaigen Absorption veränderlich seien, d. h. in (40) wird wieder $B_{mnp} = 0$ gesetzt, in (41) jedoch anstatt N_0

$$N = N_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right).$$

Das Außenfeld wird folglich

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \int_{\Omega} \text{rot}_M' \text{rot}_M' \frac{v \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} N_0 \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \text{rot}_M' \text{rot}_M' \mathfrak{B} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\omega + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \int_{\Omega} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \text{rot}_M' \text{rot}_M' \mathfrak{B} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} \frac{e^{i \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} d\omega. \end{aligned}$$

Das erste Integral rechts bezeichnen wir mit \mathfrak{G}_b ; es bedeutet nach § 5 die Beugungserscheinungen am Würfel. Das zweite, neu hinzugekommene Glied wird das zerstreute Licht ergeben. Dieses Glied besteht aus einer Reihe von Integralen, die von m , n und p abhängig sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir dieselben mit $\mathfrak{G}_z(m, n, p)$ und erhalten somit

$$(45) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_b + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \mathfrak{G}_z(m, n, p).$$

Die Integrale \mathfrak{G}_z wandeln wir vermöge (17) in ein Flächenintegral über die ganze Würfelfläche um:

$$\mathfrak{G}_z(m, n, p) = \frac{c^2}{\omega^2(A^2 - 1)} \int_F \text{rot}_{M'} \text{rot}_M \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{P} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right] e^{\frac{i\omega(t - \frac{r}{c})}{r}} d\sigma.$$

Bedenken wir, daß M' sehr entfernt ist, können wir ebenso wie in § 5 hinlänglich genau schreiben

$$\mathfrak{G}_z(m, n, p) = \frac{1}{A^2 - 1} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^3} \int_F \left[e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \right] \frac{e^{\frac{i\omega(t - \frac{r}{c})}{r}}}{r} d\sigma,$$

oder noch, wiederum unter Weglassen eines verschwindenden Gliedes

$$\mathfrak{G}_z(m, n, p) = - \frac{i\omega}{c(A^2 - 1)} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^3} \int_F \left[\frac{d\mathfrak{r}}{d\nu} - \mathfrak{U} \times \frac{d\mathfrak{R}}{d\nu} \right] e^{-\frac{i\omega \mathfrak{U} \times \mathfrak{R}}{c}} \frac{e^{\frac{i\omega(t - \frac{r}{c})}{r}}}{r} d\sigma.$$

Dieser Ausdruck ergibt nach Integration

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_z(m, n, p) \\ = \frac{\omega^3}{c^3} J^3 e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p} \frac{(\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathfrak{r}_0}{r_0^3} \frac{e^{\frac{i\omega(t - \frac{r_0}{c})}{r_0}}}{r_0} \end{array} \right.$$

Hier haben wir der Kürze halber gesetzt

$$(47) \quad \xi_m = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_x - \alpha); \quad \eta_n = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_y - \beta); \quad \zeta_p = \frac{L\omega}{2c} (\mathfrak{U}_z - \gamma),$$

wo α, β, γ die Richtungskosinusse des Vektors \mathbf{r}_0 sind. η_n und ζ_p sind immer reell, ξ_m wird dagegen mit dem Brechungsindex komplex.

Wenn wir (46) in (45) substituieren, ergibt sich offenbar die zu ermittelnde zufällige Feldstärke im Außenfelde:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_b + \frac{\omega^2}{c^2} L^3 \frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^3} e^{i\omega \left(t - \frac{r_0}{c}\right)} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p}.$$

Unser Ziel ist indessen die mittlere Intensität, nicht die zufällige Amplitude. Diese Aufgabe macht zwei Mittelungen notwendig, über die Zeit und über die unablässig schwankenden Parameter B_{mnp} . Wir setzen zuerst

$$\mathfrak{E}_Z = \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \mathfrak{E}_Z(m, n, p);$$

mithin

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_b^2 + 2\mathfrak{E}_b \mathfrak{E}_Z + \mathfrak{E}_Z^2.$$

Das Zwischenglied verschwindet bei der Mittelung über die B infolge der Gleichung $\overline{B_{mnp}} = 0$. Die Intensitäten des Beugungs- und des Opaleszenzfeldes addieren sich also schlechtweg, wie dies zu erwarten ist.

Es erübrigt somit nur \mathfrak{E}_Z^2 , zweimal gemittelt, zu berechnen. Wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\mathfrak{E} = \frac{\omega^2 L^3}{c^2 r_0} \cdot \frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^2},$$

$$\delta_{mnp} = \frac{\omega r_0}{c} + (\xi_m + \eta_n + \zeta_p),$$

$$P_{mnp} = \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p},$$

so erhalten wir zunächst

$$\mathfrak{E}_Z = \mathfrak{E} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} e^{i(\omega t - \delta_{mnp})}.$$

Um die Mittelung über die Zeit zu erzielen, soll nun \mathfrak{E}_Z mit der zu ihm konjugierten komplexen Größe multipliziert werden und, weil es sich um harmonische Schwingungen handelt, noch mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert werden.

Wenn der Brechungsindex reell ist, sind sowohl P_{mnp} wie auch δ_{mnp} reelle Größen. Wenn aber der Brechungsindex komplex ist $n_0 = \nu - i\kappa$, wird ξ_m

$$(48) \quad \xi_m = \xi_m' - i\xi_m'',$$

wo

$$(49) \quad \xi_m' = \frac{L\omega}{2c} (\nu - \epsilon) - m \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$(50) \quad \xi_m'' = \frac{L\omega\kappa}{2c}.$$

Dann wird offenbar P_{mnp} komplex, und auch δ_{mnp} bekommt einen imaginären Teil, der mit demjenigen der Größe ξ_m identisch ist. Wenn wir unter P^* die konjugierte Größe von P verstehen, erhalten wir also

$$\overline{\mathfrak{E}_\Sigma^2} = \frac{\mathfrak{G}^2}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_{p'} B_{mnp} B_{m'n'p'} P_{mnp} P_{m'n'p'}^* e^{-\frac{L\omega\kappa}{c}},$$

wo m, n, p, m', n' und p' voneinander unabhängig die ganze Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen darstellen.

Bei der Mittelung über die B fallen hier sehr viele Glieder fort. Denn im allgemeinen variieren die B voneinander unabhängig, so daß

$$\overline{B_{mnp} B_{m'n'p'}} = 0.$$

Allemaal aber, wo die Elemente m und m', n und n', p und p' zum absoluten Betrage paarweise gleich sind, erhalten wir gemäß (6)

$$\overline{B_{mnp} B_{m'n'p'}} = \frac{1}{8NL^3}.$$

Wir bekommen sonach

$$(51) \quad \overline{\mathfrak{E}_\Sigma^2} = \frac{\mathfrak{G}^2}{16NL^3} e^{-\frac{L\omega\kappa}{c}} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_{p'} P_{mnp} P_{m'n'p'}^*,$$

wo die Indizes die Bedingungen

$$|m| = |m'|, \quad |n| = |n'| \quad \text{und} \quad |p| = |p'|$$

erfüllen sollen.

P_{mnp} ist ein Produkt aus drei Faktoren, jeder nur von einem der Indizes m, n und p abhängig. Wenn wir anfänglich etwa n, p, n' und p' festhalten, brauchen wir darum, um

die beiden Summationen über m und m' zu erledigen, nur die Summe

$$S_m = \sum_m \left(\frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_m^*}{\xi_m^*} + \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_{-m}^*}{\xi_{-m}^*} \right),$$

zu berechnen.

Nach (48), (49), (50) ist

$$\xi_m = \frac{L \omega}{2c} (\nu - \alpha) - m \cdot \frac{\pi}{2} - i \frac{L \omega \kappa}{2c}.$$

Da ω/c sehr groß ist, muß $\frac{\sin \xi_m}{\xi_m}$ im allgemeinen sehr klein sein, sofern L nicht besonders klein gewählt wird, was wir keine Ursache zu tun haben. Nur für einen gewissen großen positiven Wert von m wird jener Quotient beträchtlich, und in derselben Weise $\frac{\sin \xi_{-m}}{\xi_{-m}}$ nur für einen gewissen großen negativen. Das zweite Glied in S kommt deshalb gegen das erste nicht in Betracht, und man erhält hinlänglich genau

$$S_m = \sum_m \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \xi_m^*}{\xi_m^*}.$$

Dieser Ausdruck schreibt sich, wenn wir die Zerlegung (48) explizite einführen

$$S_m = \sum_m \frac{\cos \text{hyp } 2 \xi_m'' - \cos 2 \xi_m'}{2 (\xi_m'^2 + \xi_m''^2)}.$$

Gemäß (50) ist ξ'' von m unabhängig, kann sonach vor das Summationszeichen gesetzt werden, und ξ_m' kann kürzer

$$- \frac{\pi}{2} (m - q)$$

geschrieben werden, wo

$$q = \frac{L \omega}{\pi c} (\nu - \alpha).$$

Indem wir dies einführen, ergibt sich

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} S_m &= \frac{2}{\pi^2} \cos \text{hyp } 2 \xi'' \sum_m \frac{1}{(m - q)^2 + \frac{4}{\pi^2} \xi''^2} \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi q \sum_m \frac{(-1)^m}{(m - q)^2 + \frac{4}{\pi^2} \xi''^2}, \end{aligned} \right.$$

wo jetzt lauter reelle Funktionen stehen.

Um die erste Summe aufzufinden, betrachten wir, eine bekannte Summationsmethode¹⁾ verwendend, die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{(z - a)^2 + b^2},$$

wo a und b reelle Konstanten seien. Für diese Funktion ist jede ganze Zahl m ein einfacher Pol mit dem Residuum

$$\frac{1}{(m - a)^2 + b^2}.$$

Überdies sind noch die beiden Pole $a \pm ib$ vorhanden, die aus den Nullstellen des Nenners hervorgegangen sind, und deren Residen sind

$$\frac{\pi \cot \pi (a + ib)}{2ib} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{\pi \cot \pi (a - ib)}{2ib}.$$

Das Integral

$$\int_C f(z) dz$$

werde nun über einen Vollkreis C vollzogen, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt und dessen Radius $m - \frac{1}{2}$ ist. An dieser Kreislinie ist der Modul $|\cot \pi z|$ endlich, und der rationale Teil der Funktion $f(z)$ hat für $|z| = \infty$ eine Nullstelle zweiter Ordnung. Vorausgesetzt, daß wir m groß genug wählen, wird somit der Modul des Integrals unterhalb jeder endlichen Grenze hinabsinken. Das integrale Residuum ist demgemäß auch gleich Null, wenn m ins Unendliche rückt. Wir erhalten mithin

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{n} \frac{1}{(m - a)^2 + b^2} + \frac{\pi}{2ib} \left(\cot \pi (a + ib) - \cot \pi (a - ib) \right) = 0.$$

Nach Vereinfachung dieses Ausdruckes wird endlich erhalten

$$(53) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{n} \frac{1}{(m - a)^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} \frac{\sin \text{hyp } 2\pi b}{\cos \text{hyp } 2\pi b - \cos 2\pi a}.$$

Die Summe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{m}{n} \frac{(-1)^n}{(m - a)^2 + b^2},$$

läßt sich ebenso aus der Funktion

1) E. Lindelöf, *Le calcul des résidus*, p. 52. Paris 1905.

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha - a)^2 + b^2}$$

ermitteln. Man erhält

$$(54) \quad \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m-a)^2 + b^2} = -\frac{\pi}{2ib} \left(\frac{1}{\sin \pi(a+ib)} - \frac{1}{\sin \pi(a-ib)} \right) \right. \\ \left. = \frac{2\pi}{b} \frac{\sin \text{hyp } \pi b \cos \pi a}{\cos \text{hyp } 2\pi b - \cos 2\pi a} \right.$$

Führt man (53) und (54) in (52) ein, so kommt—

$$S_m = \frac{\cos \text{hyp } 2\xi'' \sin \text{hyp } 4\xi'' - 2 \cos^2 \pi \varphi \sin \text{hyp } 2\xi''}{\xi'' (\cos \text{hyp } 4\xi'' - \cos 2\pi \varphi)} = \frac{\sin \text{hyp } 2\xi''}{\xi''},$$

wo wieder φ für a und $2\xi''/\pi$ für b substituiert worden sind. Wenn wir noch den Ausdruck (50) für ξ'' einsetzen, bekommt S_m schließlich die Form

$$(55) \quad S_m = \frac{2e}{L \omega \kappa} \sin \text{hyp } \frac{L \omega \kappa}{c}.$$

In ganz derselben Weise lassen sich die Summen über n und p ermitteln. Man findet sie am einfachsten, wenn man in (55) κ gegen Null gehen läßt. Alsdann ergibt sich

$$(55a) \quad S_n = S_p = 2.$$

Hiermit ist die Mittelung über die B ausgeführt. Durch Substituieren der Summationsergebnisse in (51) ergibt sich

$$\overline{\mathbb{E}_\Sigma^2} = \frac{\mathbb{E}^2}{16 N L^3} \cdot \frac{4e}{L \omega \kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L \omega \kappa}{c}} \right),$$

oder wenn wir wiederum ϑ in der gleichen Bedeutung wie im vorigen Paragraphen einführen

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathbb{E}_\Sigma^2} &= \frac{\omega^4}{2c^4 N} \cdot \frac{c L^3}{2 \omega \kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L \omega \kappa}{c}} \right) \frac{\mathbb{P}^2}{r_0^2} \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{8 \pi^4}{N \lambda^4} \cdot \frac{c L^3}{2 \omega \kappa} \left(1 - e^{-\frac{2L \omega \kappa}{c}} \right) \frac{\mathbb{P}^2}{r_0^2} \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \right.$$

Die Intensität im Opaleszenzfelde ist demnach der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional. Sie verteilt sich um die Schwingungsrichtung der Elementarresonatoren wie die strahlende Energie um einen Hertzschen Resonator.

Der Faktor

$$(57) \quad \frac{e L^2}{2 \omega \pi} \left(1 - e^{-\frac{2 L \omega \pi}{c}} \right) \mathfrak{P}^2$$

allein beruht auf den optischen Eigenschaften und der Größe des Würfels. Es ist wichtig, zu bemerken, daß dieser Faktor gerade dem über das ganze Körpervolumen Ω erstreckten Integral

$$(58) \quad \int_{\Omega} \mathfrak{P}^2 e^{-\frac{2 \omega \pi x}{c}} dx = \frac{e L^2}{2 \omega \pi} \left(1 - e^{-\frac{2 L \omega \pi}{c}} \right) \mathfrak{P}^2$$

gleich ist. Da

$$\mathfrak{P} e^{-\frac{\omega \pi x}{c}}$$

die auf die Volumeinheit bezogene Resonatorenamplitude ist, bedeutet dies, daß die Intensität des Opaleszenzlichtes durch die lokale Amplitude der Molekularresonatoren völlig bestimmt ist, so daß bei gleicher Amplitude die Natur des Gases einflußlos ist.

Die gesamte, während einer Sekunde zerstreute elektrische und magnetische Energie beträgt

$$\frac{e}{4 \pi} \cdot 2 \pi \int_0^{\pi} \mathfrak{E}_z^2 \sin \theta d \theta$$

oder nach (56) und (58)

$$\frac{16 \pi^4 e}{3 N k^4} \int_{\Omega} \mathfrak{P}^2 e^{-\frac{2 \omega \pi x}{c}} dx.$$

Aus einem Volumelemente $d\omega$, wo die Amplitude \mathfrak{P} ist, wird sonach die Energiemenge

$$(59) \quad \frac{16 \pi^4 e}{3 N k^4} \mathfrak{P}^2 d\omega$$

sekundlich zerstreut.

Der Extinktionskoeffizient h ist durch die Gleichung

$$dW = -Wh dx$$

definiert, wo W die auf die Volumeinheit entfallende Energie der Primärwelle ist. Um ihn zu finden, müssen wir also außer der zerstreuten Energie noch W kennen. Wenn der Brechungs-

index n_0 reell ist, beträgt die augenblickliche elektromagnetische Energie¹⁾

$$\frac{\mathcal{E} \mathcal{D}}{8 \pi} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8 \pi} = \frac{4 \pi n_0^2}{(n_0^2 - 1)^2} \mathfrak{P}^2 \cos^2 \omega t,$$

oder in bezug auf die Zeit gemittelt

$$(60) \quad \mathcal{H} = \frac{2 \pi n_0^2}{(n_0^2 - 1)^2} \mathfrak{P}^2.$$

Wir betrachten nun ein Volumenelement $d\omega$ des Lichtbündels, das sich mit dem Lichte mit der Geschwindigkeit c/n_0 bewegt. Seine Energie zu einem gewissen Zeitpunkte ist $W d\omega$. Wenn es die Strecke Δx zurückgelegt hat, ist die Energie um $h W d\omega \Delta x$ verringert. Um diese Strecke zurückzulegen, geht die Zeit

$$\frac{n_0 \Delta x}{c}$$

drauf. Während jenes Zeitintervalles hat das Element gemäß (59) die Energie

$$\frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \mathfrak{P}^2 d\omega \cdot \frac{n_0 \Delta x}{c}$$

ausgestrahlt, und es wird folglich

$$h W d\omega \Delta x = \frac{16 \pi^4 c}{3 N \lambda^4} \mathfrak{P}^2 d\omega \cdot \frac{n_0 \Delta x}{c},$$

somit infolge (60)

$$(61) \quad h = \frac{8 \pi^2}{3 N \lambda^4} \frac{(n_0^2 - 1)^2}{n_0}.$$

Genau die gleiche Formel findet auch Planck²⁾, während Lord Rayleigh³⁾ zum Ausdrucke

$$\hbar = \frac{32 \pi^3 (n_0 - 1)^2}{3 N \lambda^4}$$

gelaugt, und endlich Einstein⁴⁾ den Wert

$$\hbar = \frac{8 \pi^3}{3 N \lambda^4} \cdot \frac{(n_0^2 + 2)^2}{9} (n_0^2 - 1)^3$$

berechnet. Die Bezeichnungen der genannten Verfasser sind behufs leichteren Vergleiches zweckmäßig abgeändert worden.

1) R. Lundblad, Ann. d. Phys. 57. p. 198. 1918.

2) M. Planck, l. c. p. 749.

3) Lord Rayleigh, l. c. p. 379.

4) A. Einstein, l. c. p. 1293.

Wenn n_0 nahe gleich Eins ist, werden alle drei λ^4 drücke identisch.

Der Fall n_0 komplex unterscheidet sich von dem vorherigen teils dadurch, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes c/v statt c/n_0 ist, teils dadurch, daß die obige Energieformel (60) mit der Formel

$$(62) \quad W = \frac{2\pi v^2}{(v^2 - x^2 - 1)^2 + 4v^2 x^2} \mathfrak{B}^2; \quad n_0 = v - ix$$

ersetzt werden soll.¹⁾ Wie man leicht nachprüfen kann, fällt dieser Ausdruck mit dem reellen Teil von (60) nicht zusammen.

Der Extinktionskoeffizient h wird jetzt

$$(63) \quad h = \frac{8\pi^3}{3N\lambda^4} \frac{(v^2 - x^2 - 1)^2 + 4v^2 x^2}{v}$$

Dieser Extinktionskoeffizient betrifft natürlich nur die Zerstreuung. Für diese Art der Extinktion ist er aber innerhalb der weitesten Grenzen gültig. Es liegt nämlich auf der Hand, daß unsere formelle Beschränkung der Rechnungen auf eine monoelektronische Substanz uns nirgends auf eine wirkliche Verengerung des Gültigkeitsbereiches unserer Rechnungen gedrängt hat. In dem nächsten Paragraphen wollen wir ferner zeigen, daß die Berücksichtigung der Wechselwirkungen der Moleküle höchstens ganz unwesentliche Modifikationen des Ergebnisses mit sich bringen kann. Endlich schließt das x in Gleichung (62) die gesamte Absorption, wie auch ihre Ursache sein mag, mit ein. Gleichung (63) muß also im gesamten Spektrum, einschließlich der Absorptionsbanden, für die Extinktion infolge der Zerstreuung zutreffen, und dies ganz unabhängig davon, ob dort noch eine Absorption irgend welcher Art vorkommt.

Als eine Kontrolle mögen wir (63) auf den idealen Fall beziehen, wo das Licht im Gase nur zerstreut, nicht konsumptiv absorbiert wird. Dann sollen wir haben

$$h = \frac{2\omega x}{c}$$

und folglich nach (63)

$$12\pi c^3 N v x = \omega^3 [(v^2 - x^2 - 1)^2 + 4v^2 x^2].$$

Diese Gleichung folgt bereits aus (39), wenn man daselbst die imaginären Teile beider Seiten gleichsetzt.

1) R. Lundblad, l. c. p. 201.

§ 7. Das Opaleszenzfeld. Zweite Näherung.

Zweck des vorliegenden Paragraphen ist, wie soeben angedeutet, die Vervollständigung der obigen Analyse im Sinne einer Berücksichtigung der Wechselwirkungen der Moleküle. Da die mathematischen Entwicklungen nichts prinzipiell Neues bieten, wollen wir sie möglichst kurz anführen. Wir erhalten infolge (40)

$$\mathfrak{E} = \int_{\Omega} \left(1 + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} e^{i \frac{\pi}{L} (mx + ny + pz)} \right) \text{rot}_{M'} \text{rot}_{M'} \\ \left[\mathfrak{P} e^{-\frac{i \omega n_0 x}{c}} + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} \left(\frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U} \right) e^{-\frac{i \omega \mathfrak{U} x \mathfrak{U}}{c}} \right] e^{\frac{i \omega (t - \frac{r}{c})}{r}} d\Omega,$$

oder analog (45) kürzer

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_b + \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} (\mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_{z_1}) \\ &+ \sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m_1'} \sum_{n_1'} \sum_{p_1'} B_{mnp} B_{m_1' n_1' p_1'} \mathfrak{E}_{z_1'} \end{aligned} \right.$$

wo \mathfrak{E}_b und \mathfrak{E}_z das gleiche wie bisher bedeuten und auch die Bedeutung von \mathfrak{E}_{z_1} und $\mathfrak{E}_{z_1'}$ leicht zu ersehen ist.

Wenn wir zur Abkürzung einen Vektor

$$(65) \quad \mathfrak{B}_{mnp} = \frac{A^2 + 2}{A^2 - 1} \mathfrak{P} - \frac{3 \mathfrak{U} \times \mathfrak{P}}{A^2 - 1} \mathfrak{U}$$

einführen und außerdem wie im vorigen Paragraphen setzen

$$P_{mnp} = \frac{\sin \xi_m}{\xi_m} \cdot \frac{\sin \eta_n}{\eta_n} \cdot \frac{\sin \zeta_p}{\zeta_p},$$

so ergibt sich ähnlich wie (46)

$$\mathfrak{E}_b = \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^2} P_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{e^{i \omega (t - \frac{r_0}{c})}}{r_0};$$

$$\mathfrak{E}_{z_1} = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^2} P_{mnp} e^{-i(\xi_m + \eta_n + \zeta_p)} \cdot \frac{e^{i \omega (t - \frac{r_0}{c})}}{r_0};$$

$$\mathfrak{E}_{z_1'} = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \frac{(r_0 \wedge \mathfrak{P}) \wedge r_0}{r_0^2} P_{m+m_1', n+n_1', p+p_1'} e^{-i(\xi_m + \xi_{m_1'} + \eta_n + \eta_{n_1'} + \zeta_p + \zeta_{p_1'})} \cdot \frac{e^{i \omega (t - \frac{r_0}{c})}}{r_0}.$$

Wie oben p. 615 ist auch hier die Intensität zu berechnen und sodann über die Zeit und über die B zu mitteln. Wir machen jedoch zuvor folgende zwei vereinfachenden Annahmen:

1. Der Brechungsindex sei reell. Dies bewirkt, daß die Exponentialfunktionen der letztgeschriebenen Ausdrücke bei der zeitlichen Mittelung wegfallen und daß die Argumente der trigonometrischen Funktionen in P reell werden.

2. Der Betrag des Vektors \mathfrak{U} sei so groß, daß Eins gegen A^2 zu vernachlässigen ist. Die physikalische Bedeutung dieser Beschränkung ist die, daß wir nur diejenigen „Dichtewellen“ der Zerlegung (1) berücksichtigen, deren Wellenlängen gegen die Wellenlängen des Lichtes hinreichend klein sind. Die Annahme ist schon deswegen unausweichlich, weil die Formel (40) nur in diesem Falle eine genügend weit gediehene Annäherung ist.

Da das erste Glied in (64) nur die Beugungserscheinungen ergibt, unterdrücken wir es im folgenden. Wir bemerken ferner bereits zum voraus, daß das Produkt der zwei letzten Termkomplexe in (64) lauter ungerade Potenzen von den B enthält und darum bei der zweiten Mittelung verschwinden müssen. Wenn wir endlich dazu noch setzen

$$\frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^2} = \mathfrak{B}' \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{(\mathbf{r}_0 \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{r}_0}{r_0^2} = \mathfrak{B}' \sin \varphi,$$

wo ϑ und φ die Winkel zwischen \mathbf{r}_0 und \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B} bedeuten, so wird erhalten

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}^2 = & \frac{\omega^4 L^6}{2 e^4 r_0^2} \left[\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} \left(\mathfrak{B}' \sin \vartheta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \mathfrak{B}' \sin \varphi \right) \right]^2 + \frac{\omega^4 L^6}{2 e^4 r_0^2} \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 \\ & \left[\sum_m \sum_n \sum_p \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{p_1} B_{mnp} B_{m_1 n_1 p_1} P_{m_1 n_1 p_1} \mathfrak{B}' \sin \varphi \right]^2, \end{aligned} \right.$$

wo $m_1 = m + m_1'$ und die Quadrierungen skalar zu vollführen sind.

Das erste Glied des Vektors \mathfrak{B}_{mnp} in Gleichung (65) verhält sich offenbar betreffs der Polarisation ebenso wie die einfallende Welle; das zweite fügt dagegen immer einen unpolarisierten Anteil hinzu; denn dem Vektor \mathfrak{U} kann durch zweckmäßige Auswahl der m , n und p jede beliebige Richtung erteilt werden. Allerdings werden auch hier die Richtungen um \mathfrak{P} infolge des Faktors $\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}$ immer hinsichtlich der Intensität bevorzugt.

Der Betrag des Vektors wird nach (65) für große numerische Werte von m , n und p nie die Grenze $2\mathfrak{P}$ überschreiten. Wenn wir uns mit der Ermittlung einer oberen Grenze der Zusatzglieder begnügen, können wir sonach $\mathfrak{B}_{mnp} \sin \varphi = 2\mathfrak{P}$ setzen und bekommen mithin für (66) den Maximalwert

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^2 &= \frac{\omega^4 L^6}{2c^4 r_0^2} \left(\mathfrak{P} \sin \vartheta + \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \cdot 2\mathfrak{P} \right)^2 \left(\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} \right)^2 \\ &+ \frac{\omega^4 L^6}{2c^4 r_0^2} \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 4\mathfrak{P}^2 \left(\sum_m \dots \sum_{p_1} B_{mnp} B_{m_1 n_1 p_1} P_{m_1 n_1 p_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Die erste Summe ist bereits berechnet. Nach (6) und (55a) ergibt sich

$$\left(\sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_{mnp} \right)^2 = \frac{1}{N L^3}$$

und man ersieht unschwer, daß die zweite Summe, die N^2 im Nenner enthält, demgegenüber verschwindend klein ist. Sonach wird endlich erhalten

$$(67) \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{\omega^4 L^3}{2c^4 N} \frac{\mathfrak{P}^2}{r_0^2} \left[\sin^2 \vartheta + 4 \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} + 4 \left(\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \right)^2 \right].$$

Das erste Glied stellt die Rayleighsche Strahlung dar. Die zwei dahinterstehenden sind die neuen Glieder, die infolge der Dichteschwankungen beizugeben sind. Diese Glieder sind, wie aus dem obigen erhellt, nur als *numerische* Maximiwerte zu betrachten; insbesondere will Gleichung (67) nichts über das Zeichen und den Polarisationszustand aussagen.

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{N} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$$

annähernd konstant; die beiden neuen Glieder sind infolgedessen mit der Dichte bzw. deren Quadrat proportional. Sie sind aber für dasjenige Druckintervall, das den Experimenten bequem zugänglich ist, außerordentlich klein. Erst wenn der Druck eine Höhe von etwa 100 Atmosphären erreicht hat, würden sich Abweichungen vom Rayleighschen Gesetze höchstens von der Größenordnung 10^{-2} einstellen; wahrscheinlich sind sie jedoch nicht einmal von dieser Größenklasse.

Obgleich eine völlig exakte Durchführung der Berechnung nicht ausgeführt worden ist, werden die gewonnenen Resultate gleichwohl ausreichend sein, um eine Entscheidung über die Frage zu liefern, ob eine dichtere Lagerung der Moleküle die durch Opaleszenz zerstreute Energiemenge beeinflussen. Die Folgerung, die aus ihnen hervorgeht, kann wohl nur die sein, daß die *Rayleighsche Formel auch im Falle dichter Lagerung innerhalb sehr weiter Grenzen die Forderungen der optischen Elektronentheorie erfüllt*.

Wollte man dagegen das Opaleszenzlicht, dessen Intensität und Polarisationsverhältnisse dazu benutzen, um Auskunft über solche subtileren Fragen zu erringen, wie z. B. die Frage von der Isotropie oder Anisotropie der Resonatoren-schwingungen, so kann die obige Behandlung des Gegenstandes nicht als genügend angesehen werden, und ich halte übrigens die im vorstehenden benutzte Methode für solche Zwecke als wenig geeignet.

Zusammenfassung.

Die Theorie der Opaleszenzstrahlung ist auf molekular-theoretischen Grundlagen entwickelt worden. Dabei ist auch der Einfluß der Dichteschwankungen auf die Schwingungen der Elementarresonatoren berücksichtigt worden. Das Feld um den betrachteten Körper setzt sich aus den Beugungserscheinungen und dem eigentlichen Opaleszenzfelde zusammen. Letzteres erscheint nur, wenn Dichteschwankungen vorhanden sind, in welchem Falle auch das Strahlungsglied in der Schwingungsgleichung auftritt. Wenn es keine Dichteschwankungen gibt, fallen sowohl das Opaleszenzfeld wie das Strahlungsglied fort. Ferner:

1. Die Rayleighsche Formel für die diffuse Zerstreuung ist durch eine neue ersetzt worden, die auch den Absorptionsindex für das einfallende Licht enthält, und die bei beliebig starker Absorption gültig bleibt. Die Rayleighsche Formel erscheint als ein spezieller Fall jenes allgemeineren Ausdruckes.

2. Es bleibt diese Formel auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Dichteschwankungen auf die Molekülschwingungen innerhalb eines sehr weiten Druckintervalles bestehen.

Uppsala. Fysiska Institutionen, 15. Juni 1918.

(Eingegangen 4. August 1918.)

**2. Nachtrag zur Arbeit: „Über die atomistische
Struktur der Elektrizität“ von R. Bär;
von Edgar Meyer.**

Gelegentlich eines Aufenthaltes von Hrn. Ehrenhaft in Zürich (September 1918) wurde eingehend über die Divergenzen zwischen den Resultaten von Hrn. Ehrenhaft und Hrn. Bär¹⁾ diskutiert. Dabei wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, daß eventuell das von Hrn. Bär verwendete Zehntel-Millivoltmeter (Siemens & Halske) doch *größere* Fehler besitzt. Hr. Tank führte deswegen in Gemeinschaft mit Hrn. Bär eine sehr exakte Eichung des Voltmeters durch (Kompensationsmethode mit Anschluß an das Weston- und Clark-Element). Es ergaben sich allerdings kleine systematische Abweichungen (maximal etwa 0,1 Skalenteile), die aber durch die Reibungswiderstände im Instrument vollständig überdeckt waren, falls bei den Einzelleistungen nicht an das Instrument geklopft wurde. Da Hr. Bär bei seinen Ablesungen das Klopfen unterließ, kommen diese systematischen Fehler für ihn *nicht* in Frage, wohl aber werden dadurch die in den Tabellen angegebenen Zahlen nicht, wie angenommen, auf ± 1 Volt, sondern nur auf ± 2 Volt sicher.

Zürich; Physikalisches Institut der Universität.

1) R. Bär, Ann. d. Phys. 57. p. 161. 1918.

(Eingegangen 19. November 1918.)

Namenregister zum Jahrgang 1918.

B.

Bär, R., Über die atomistische Struktur der Elektrizität 57, 161.

Benedicks, C., Ein für Thermo-
elektrizität und metallische Wärme-
leitung fundamentaler Effekt 55, 1. — Ein für Thermo-
elektrizität und metallische Wärme-
leitung fundamentaler Effekt (Fort-
setzung) 55, 103.

Björnsthall, Y., Untersuchungen
über anisotrope Flüssigkeiten 56, 161.

Borelius, G., Prüfung der Thom-
son'schen Theorie der Thermo-
elektrizität durch Messungen an
Peltierwärme, Thermokraft und
Thomsonwärme, die letzteren nach
einer neuen Methode 56, 388. —
Zur Elektronentheorie der Thermo-
elektrizität 57, 231. — Zur Elek-
tronentheorie der metallischen
Leitung 57, 278.

Born, M., Elektronentheorie des
natürlichen optischen Drehungs-
vermögens isotroper und aniso-
troper Flüssigkeiten 55, 177.

Brieger, K., Zum optischen Ver-
halten des Kristallwassers 57, 287.

D.

Dember, H. und Uibe, M., Über
die scheinbare Gestalt des Him-
melsgewölbes 55, 387. — Über

Annalen der Physik. IV. Folge. 57.

die spektrale Polarisation des
diffusen Sonnenlichts in der Erd-
atmosphäre 56, 208.

E.

Ehrenhaft, F., Über die Teilbar-
keit der Elektrizität 56, 1. — Die
Photophorese. (Hierzu Tafel I bis
IV) 56, 81.

Einstein, A., Prinzipielles zur
allgemeinen Relativitätstheorie 55, 241.

F.

Frivold, O. E., Diamagnetismus
bei schwachen Feldstärken. (Vor-
läufige Mitteilung) 57, 471.

G.

Gockel, A., Beiträge zur Kenntnis
von Farbe und Polarisation des
Himmelslichtes 56, 617.

Grüneisen, E., Die thermische
Ausdehnung regulär kristalli-
sierender fester Körper 55, 371.

H.

Haas, W. J. de, Die Beugungs-
erscheinungen, welche an einer
großen Anzahl unregelmäßig ver-
streuter Öffnungen oder undurch-
lässiger Teichen auftreten 57,
568.

Hardtke, O., Über die Bedingungen für die Emission der Spektren des Stickstoffs 56, 363. — Ionisierung verschiedener Elemente und Auftreten ihrer Lichtemission in der positiven Schicht 56, 383.

Hardtke, O., Stark, J. und Liebert, G., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VII. Die Fowlersche Heliumserie 56, 569.

Hauer, F. v., Die Polarisation des Lichtes in trüben Medien im Hinblick auf das Himmelslicht 57, 145.

Herzfeld, K. E., Zur Berechnung der elektrochemischen Normalpotentiale 56, 133.

Hettner, G., Über das ultrarote Absorptionsspektrum des Wasserdampfes. (Hierzu Tafel I) 55, 476. — Über das Rotationsspektrum der Gase, insbesondere des Wasserdampfes 55, 545.

Holtzmark, J., Über den Intensitätsverlauf in Serienspektren bei der Erregung mit Kathodenstrahlen 55, 245.

Huch, G., Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes 57, 1.

Humm, R. J., Über die Bewegungsgleichungen der Materie. Ein Beitrag zur Relativitätstheorie 57, 68.

J.

Jakob, M., Über den Thomson-Joule-Effekt und die Zustandsgleichung von Gasen bei kleinen Drucken 55, 527.

John, W., Untersuchungen über die Dielektrizitätskonstante von Mischungen fester Körper mit Luft 55, 299.

K.

Kottler, F., Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie 56, 401.

L.

Landé, A., Über die natürliche optische Aktivität isotroper Flüssigkeiten 56, 225. — Die Randbelegungsmethode zur Lösung von Potential- und Schwingungsproblemen 57, 519.

Laue, M. v., Röntgenstrahlinterferenz und Mischkristalle 56, 497.

Lehmann, O., Die flüssigen Kristalle der 10-Bromphenanthren-3-oder-6-sulfosäurehydrate 55, 81. — Zur Hydrodynamik schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten 56, 321. — Über die Ionenwanderung in den flüssigen Kristallen von Ammoniumoleathyoxant 57, 244.

Liebert, G., Stark, J. und Hardtke, O., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VII. Die Fowlersche Heliumserie 56, 569. Liebert, G., Der Effekt des elektrischen Feldes auf ultraviolette Linien des Heliums 56, 589. — Eine neue Heliumserie unter der Wirkung des elektrischen Feldes 56, 610.

Lundblad, R., Über einige Grundbegriffe in der Optik dispergierender Medien 57, 188. — Zur Theorie des Opaleszenzlichtes 57, 581.

M.

Martin, P., Der magneto-optische Kerreffekt bei ferromagnetischen Verbindungen. (Zweite Mitteilung) 55, 561.

Meyer, E. und Schüler, H., Über die Entstehung der Kathodenstrahlen 56, 507.

Meyer, E., Nachtrag zur Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität“ von R. Bär 57, 628.

P.

Parankiewicz, I., Über die lichtpositive und die lichtnegative Photophorese. (Untersucht am Schwefel und Selen.) 57, 489.

Pauer, F., Magnetische Drehung der Polarisationsenebene des Lichtes in einem Gase Bohrscher Moleküle 56, 261.

R.

Ratnowsky, S., Zur Theorie molekularer und inneratomarer Vorgänge 56, 529.

Reiche, F. und Smekal, A., Zur Theorie der Röntgenspektren 57, 124.

Rotszajn, S., Die Anwendung der Planckschen Erweiterung der Quantenhypothese auf rotierende Gebilde mit zwei Freiheitsgraden in einem Richtungsfelde 57, 81.

Rückert, E., Brechung und Absorption des Wassers für meterlange elektrische Wellen 55, 151.

S.

Samson, C., Über ein Braunschweiges Rohr mit Glühkathode und einige Anwendungen desselben 55, 608.

Schaefer, Cl. und Schubert, M., Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. (Bemerkungen zu der gleichnamigen Arbeit der Herren Ve-gard und Schjelderup) 55, 397.

— Ultrarote Eigenfrequenzen der Nitrate 55, 577.

Schames, L., Theorie der charakteristischen Kurven des homogenen Zustandsgebiets und ihr Zusammenhang mit der Thermodynamik adiabatischer Expansionen 57, 321.

Schmidt, G. C., Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. (Dritte Abhandlung.) 56, 341.

Schottky, W., Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern 57, 541.

Schubert, M. und Schaefer, Cl., Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. (Bemerkungen zu der gleichnamigen Arbeit der Herren Ve-gard und Schjelderup) 55, 397.

Schüler, H. und Meyer, E., Über die Entstehung der Kathodenstrahlen 56, 507.

Smekal, A. und Reiche, F., Zur Theorie der Löntgenspektren 57, 124.

Smekal, A., Zur sogenannten I. Planckschen Quantentheorie. (Zur Quantentheorie des Paramagnetismus) 57, 376.

Stark, J., Hardtke, O. und Liebert, G., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VII. Die Fowler-sche Heliumserie 56, 569.

Stark, J., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VIII. Neue im elektrischen Feld erscheinende Hauptserien des Heliums 56, 577.

Stenström, W., Experimentelle Untersuchungen der Röntgenspektren. M-Reihe. (Hierzu Tafel I) 57, 347.

T.

Toepler, M., Zerreißen von Flüssigkeiten zwischen rollender Kugel und ebener Platte 55, 337.

U.

Uibe, M. und Dember, H., Über die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes 55, 387. — Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre 56, 208.

Uller, K., Elastische Oberflächen-Planwellen 56, 463.

V.

Völker, W., Über die Abgabe positiver Elektrizität durch Salze von Alkalien und alkalischen Erden unter der Mitwirkung von Kanalstrahlen 57, 257.

W.

Wagner, E., Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen. Über die Messung der Planckschen Quantenkonstante h aus dem zur Erzeugung homogener Bremsstrahlung notwendigen Minimumpotential 57, 401.

Wegener, A., Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen 57, 203.

Weinstein, M. B., Zur Prüfung der Annahmen über die thermodynamischen Potentiale 55, 497.

Wereide, Th., Die Elektronentheorie der Metalle 55, 589.

Wiesinger, H., Über Erregung elektromagnetischer Schwingungskreise durch Beladen mit magnetischer Energie 55, 401.



Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

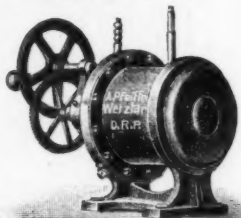
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen
und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

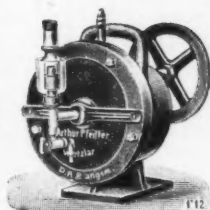
System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P.
angemeldet



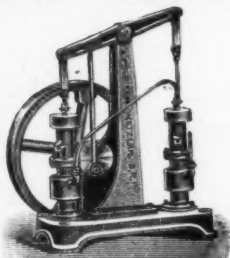
Hochvakuum-
Apparate
zur
Demonstration
und zu
wissenschaftlichen
Untersuchungen.

Neu-
konstruktionen
nach Angabe.

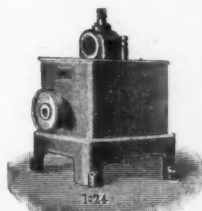


Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von
Luftpumpen;
Trockene rotierende
Luftpumpen,
Trockene Schieber-
luftpumpen,
Quecksilberluftpumpen
aller Systeme,
Kompressionsluftpumpen.

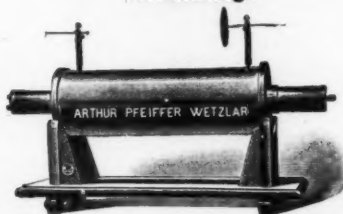


Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000 mm
Funkenlänge

Eingetragene



Fabrik-Marko



Induktoren
mit Demon-
strations-
schaltung.

Alle
Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

E. Leybold's Nachfolger

Cöln

Neu!

Gaede-Diffusionspumpe

D. R. P.

(vergl. Annalen der Physik 46. 1915, S. 337—392)

Luftleere 0,00001 mm Hg und höher.

Die Sauggeschwindigkeit der Diffusionspumpe ist etwa so groß wie bei Gaede's rotierender Quecksilberpumpe, vor welcher sie aber den Vorzug besitzt, alle Dämpfe wie Wasser- und Fettdämpfe, ausgenommen allein Quecksilberdämpfe, abzusaugen. Wegen des Fortfalls jeder mechanischen Bewegung nach Abstellen der Vorvakuumpumpe ist die Diffusionspumpe für alle diejenigen Apparaturen und wissenschaftlichen Versuchsanordnungen unentbehrlich, bei welchen eine Luftpumpe dauernd ohne Bewachung die höchsten Vakua aufrecht erhalten muß. Das erforderliche Vorvakuum von 0,1 mm wird am besten mit der

Gaede'schen Kapselpumpe

erreicht.

Ein neues Prinzip für Luftpumpen!

Alleinige Inseratenannahme durch: **Gelsdorf & Co., Eberswalde.**

Metzger & Wittig, Leipzig.

